

Лекция 7. Колебания

Клименок Кирилл Леонидович

15.10.2026

1 Колебания

1.1 Выведем систему из равновесия

Отвезём маятники на Луну

Шестая неделя дважды отклоняла тело на малый угол: брусок от вращения вокруг оси, трубу от равновесия, и ответы вышли разные. Брусок, раскрученный вокруг оси наибольшего или наименьшего момента, при малом отклонении оси только покачивается, а вокруг средней оси кувыркается (конспект шестой недели, раздел о вращении без опор). В задаче шестой недели фабричная труба, треснувшая у основания, стояла вертикально в равновесии и всё же упала («Падающая труба»). Эта глава разбирает случай, когда отклонение от равновесия остаётся малым и система качается около него. Тело на оси войдёт в неё маятником, который возьмёт у шестой недели угол, момент инерции I_A и произведение ma массы на расстояние от оси до центра масс готовыми (конспект шестой недели, итоговый раздел главы; раздел о физическом маятнике).

От твёрдого тела линия курса ведёт к деформациям, которые договорённость шестой недели запретила; их вернёт восьмая неделя (конспект восьмой недели, раздел о переходе от твёрдого тела к деформируемым средам). Колебания встают между ними, потому что так движутся и материальная точка, и твёрдое тело, и даже заряд в электрическом контуре. Колебания, затухающие и незатухающие, бывают и при обучении нейросетей. В конце главы трение тяжёлого шарика будет настроено так, чтобы он быстрее всего сел на дно оврага, и тем же рассуждением настраивают метод градиентного спуска с импульсом (раздел об овраге и методе с импульсом).

Подвесим пружину вертикально. Груз массой 0,1 кг на горизонтальной пружине жёсткостью 10 Н/м качается с периодом 0,63 с (раздел о пружинном маятнике). Повесим ту же пружину с тем же грузом вертикально. Вес растянёт её, и равновесие уйдёт вниз на $mg/k = 9,8$ см, как в задаче четвёртой недели о грузе на пружине («Работа при растяжении пружины с грузом»). Оттянем груз от нового равновесия и отпустим. Период останется прежним, 0,63 с: постоянная сила сдвинула равновесие, а частоту не тронула.

Спросим о маятниках на Луне. Теперь отвезём на Луну оба груза: тот, что висит на пружине, и груз метрового маятника. Ускорение свободного падения на Луне $1,62 \text{ м/с}^2$, примерно вшестеро меньше земного $9,81 \text{ м/с}^2$, и вес каждого груза во столько же раз меньше, а масса прежняя. Изменятся ли периоды?

Ожидания здесь расходятся. Пружина только что показала, что вес сдвигает равновесие и не трогает частоту, и по этому правилу на Луне не изменится ни один период: вес там всего лишь меньше. А маятник на Луну отвозила ещё первая неделя, и в её опыте он качался в 2,46 раза медленнее, чем на Земле.

Правило пружины верно для пружины, а опыт первой недели для маятника. Пружину на Луне вес растягивает на 1,6 см вместо 9,8 см на Земле, а период у груза прежний, 0,63 с (рис. 1). Маятник на Луне качается с периодом 4,94 с вместо 2,01 с на Земле, в $\sqrt{9,81/1,62} = 2,46$ раза медленнее.

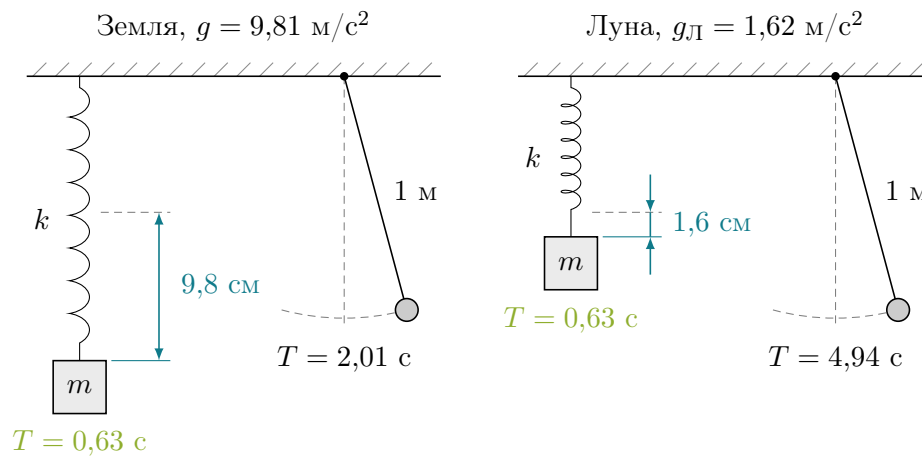


Рис. 1: Та же пружина с тем же грузом растянута на Луне меньше, и груз качается около более высокого положения, но с тем же периодом: вес только сдвигает равновесие. Маятнику тяжесть служит возвращающей силой, его жёсткость $mg_{\text{Л}}$ на Луне меньше в $g/g_{\text{Л}}$ раз, и период длиннее в $\sqrt{g/g_{\text{Л}}} = 2,46$ раза. Сдвиги равновесия нарисованы в одном масштабе, маятник без масштаба.

Тяжесть в этих двух системах делает разное. Груз на пружине возвращает упругость, и жёсткость k принадлежит самой пружине, на Луне она та же, а вес входит в сумму сил постоянным слагаемым. Груз маятника возвращает сама тяжесть: нить держит его на дуге и тянет к подвесу, а к нижней точке груз тянет составляющая веса вдоль дуги. На Луне эта составляющая слабее при той же массе груза, и вместе с g уменьшается жёсткость маятника, которую глава найдёт равной $mg_{\text{Л}}$ (раздел о динамическом и энергетическом методах). Когда постоянная сила меняет жёсткость, а когда только сдвигает равновесие, глава разберёт отдельно (раздел о постоянной силе).

Назовём, на чём держится глава. Ответ о Луне держится на том же, на чём держится вся глава. Утверждений у неё два.

1. **Около устойчивого равновесия малые колебания идут по одному уравнению, и частоту задают кривизна потенциала и инерция.** Груз на пружине, маятник, тело на оси и электрический контур подчиняются разным законам, а уравнение у них одно: в равновесии сила равна нулю, и при малом отклонении в ней остаётся только член, пропорциональный смещению. Кривизной потенциала глава называет вторую производную потенциальной энергии в равновесии. На языке сил ей отвечает жёсткость, и что это одно и то же, показано в разделе о динамическом и энергетическом методах. Инерция в обоих

методах одна: масса, момент инерции, индуктивность. Первая часть главы выводит уравнение и рецепт получения частоты (раздел о частоте из кривизны потенциала), вторая смотрит, как меняются жёсткость и инерция: у тела на оси, под постоянной силой и у двух тел, скреплённых пружиной.

2. **Затухание мерят числом колебаний системы.** Трение входит в уравнение таким же первым членом, только пропорциональным скорости, и на интервале, малом против этого числа периодов, трением можно пренебречь (раздел о числе колебаний).

За малое отклонение платит амплитуда. В модели период от неё не зависит, а у настоящего маятника растёт, и насколько, глава покажет числом (раздел о периоде на большой амплитуде). Нового механического закона неделя не вводит: уравнения колебаний дают второй закон Ньютона и уравнение моментов, а новое в том, что из них следует около равновесия. В конце главы шесть систем сведены в одну таблицу (итоговый раздел главы).

Что такое колебания

Качели после толчка и ток в контуре из катушки и конденсатора движутся по-разному, но у этих движений есть общее: система раз за разом проходит около одного и того же состояния. **Колебаниями** называют процесс изменения состояния системы около равновесия, который в той или иной степени повторяется во времени. Повторение не обязано быть точным: следующий цикл может быть лишь похож на предыдущий, как размах качелей, который понемногу убывает.

Отличим устойчивое равновесие от неустойчивого. Равновесием называют состояние, в котором система может оставаться сколь угодно долго. Сила, действующая на каждое её тело, в равновесии равна нулю, а у тела на оси равен нулю и момент сил. Если положение системы задаёт одна координата x и у сил есть потенциальная энергия $U(x)$, равновесие стоит там, где её производная равна нулю, $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} = 0$ (конспект четвёртой недели, раздел о силе и потенциальной энергии).

Около разных равновесий системы ведут себя по-разному. Если при малом отклонении возникает сила, которая тянет систему обратно, равновесие **устойчивое**, и у потенциальной энергии здесь минимум; в задаче четвёртой недели такое равновесие было у двух молекул, там, где сила между ними меняет знак («Равновесие в потенциале Леннарда-Джонса»). Если сила уводит систему дальше, равновесие **неустойчивое**, и у энергии здесь максимум. Маятник на лёгком стержне, поставленный грузом вверх, стоит в равновесии, но малое отклонение его роняет; груз на нити так не стоит, нить его не толкает. Метровый маятник на стержне, отпущенный из покоя рядом с верхней точкой, удаляется от неё в e раз примерно за полсекунды, за 0,53 с (раздел о частоте из кривизны потенциала). Бывает и безразличное равновесие. Тело, подвешенное на оси, которая проходит через его центр масс, остаётся в покое при любом угле поворота, и колебаться ему не с чего (раздел о физическом маятнике).

Колебания возникают около устойчивого равновесия, когда систему из него вывели. Если отклонение мало, а у потенциальной энергии в минимуме есть кривизна, колебания гармонические (раздел о частоте из кривизны потенциала). Колебания бывают и без этого, только период у них, как правило, зависит от амплитуды (раздел о колебаниях без линейной силы).

Разделим колебания на виды. Чаще всего колебания делят по тому, что их поддерживает.

- **Свободные колебания** идут, когда систему вывели из равновесия и предоставили самой себе, а трения нет. Так свободные колебания понимаются в этой главе. Многие учебники называют свободными любые колебания без внешних воздействий, и тогда затухающие тоже свободные.
- **Затухающие колебания** идут с трением: оно отнимает энергию, и амплитуда понемногу убывает.
- **Вынужденные колебания** навязывает системе внешняя периодическая сила.
- **Параметрические колебания** раскачивает изменение параметров самой системы. Сидящий на качелях откидывается назад и вытягивает ноги, когда качели идут вперёд, а когда они идут назад, садится прямо и поджимает их. Положение его тела относительно подвеса при этом меняется, то есть меняется сама система. Но раскачка сидя не чисто параметрическая. Поворачивая тело на сиденье, человек раз за период подталкивает качели моментом сил, и у сидящего этот толчок даёт больше, чем изменение длины маятника: такая раскачка ближе к вынужденным колебаниям. Энергия груза, у которого по ходу колебаний меняют жёсткость пружины, тоже не сохраняется (конспект четвёртой недели, раздел о законе сохранения энергии).

Трение есть у всякой настоящей системы, и свободные колебания остаются моделью. Колебания можно считать свободными, если система успевает совершить много колебаний раньше, чем трение скажется. Сколько это «много», глава сосчитает в конце (раздел о числе колебаний).

Глава разбирает первые два вида. Сначала свободные колебания на четырёх системах: грузе на пружине (раздел о пружинном маятнике), маятнике (раздел о математическом маятнике), электрическом контуре (раздел об электромагнитных колебаниях) и теле на оси (раздел о физическом маятнике). Затем постоянная сила и два тела (разделы о постоянной силе и о двух тележках на пружине), большая амплитуда (раздел о периоде на большой амплитуде) и трение (раздел о затухающих колебаниях). Вынужденные и параметрические колебания здесь не разбираются.

1.2 Решим уравнение пружины

Пружинный маятник

Груз массой m лежит на гладком горизонтальном столе и прикреплён к пружине жёсткостью k , второй конец которой закреплён (рис. 2). Выведем груз из равновесия и отпустим. Как он будет двигаться и от чего зависит время одного колебания? Трение о стол и массу пружины не учитываем. Трение даст затухание, о нём конец главы (раздел о затухающих колебаниях), а массой пружины можно пренебречь, пока она мала против массы груза.

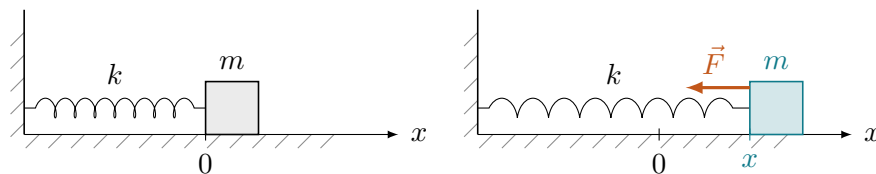


Рис. 2: Груз m на пружине жёсткостью k скользит по гладкому столу. Слева он в равновесии, у метки 0 , справа смещён на x , и растянутая пружина тянет его назад с силой $-kx$.

Решим задачу динамическим методом, вторым законом Ньютона (конспект третьей недели, раздел о втором законе). Смещение груза от равновесия обозначим x . Пружина действует на груз силой $F = -kx$. Пока растяжение мало, сила пропорциональна ему (закон Гука), а знак минус говорит, что сила направлена к равновесию: растянули пружину, $x > 0$, и она тянет груз назад, сжали, $x < 0$, и она толкает его вперёд. При больших деформациях пропорциональность нарушается; что тогда бывает с колебаниями, разобрано отдельно (раздел о колебаниях без линейной силы). Уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

где $\ddot{x}$ ускорение груза. Разделим на m :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2)$$

и обозначим

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3)$$

Уравнение принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4)$$

Систему, движение которой подчиняется этому уравнению, называют гармоническим осциллятором. Проверим размерность: жёсткость измеряется в ньютонах на метр, $[k] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2$, поэтому k/m имеет размерность $1/\text{с}^2$, и ω измеряется в обратных секундах.

Угадаем решение и проверим. Уравнение содержит вторую производную, это дифференциальное уравнение второго порядка. Общих методов решения таких уравнений у нас пока нет, поэтому решение угадаем. Нужна функция, которая после двух дифференцирований возвращается сама, умноженная на отрицательное число. Так ведут себя косинус и синус. Попробуем

$$x(t) = A \cos(\omega t + \psi_0) \quad (5)$$

с постоянными A и ψ_0 . Первая производная

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \psi_0) \quad (6)$$

и вторая

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \psi_0) \quad (7)$$

Подставим их в уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \psi_0) + \omega^2 A \cos(\omega t + \psi_0) = 0 \quad (8)$$

Равенство выполняется при любых A и ψ_0 . Эти два числа остаются свободными, и выбирают их начальные условия. Знак минус в законе силы здесь и сработал. Будь в уравнении плюс, $\ddot{x} = +\omega^2 x$, вторая производная повторяла бы функцию со своим знаком, так ведёт себя экспонента, и груз уходил бы от равновесия, как перевёрнутый маятник (раздел об определении колебаний).

Прочтём амплитуду, фазу и период. Число A называют амплитудой: это наибольшее отклонение груза от равновесия, потому что косинус не выходит за единицу. Аргумент косинуса $\omega t + \psi_0$ называют фазой. Фаза показывает, в какой точке цикла находится груз, а ψ_0 есть фаза в момент $t = 0$, начальная фаза. Величину ω называют циклической частотой. Косинус повторяется, когда фаза набирает 2π , поэтому период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (9)$$

Для груза $m = 0,1$ кг на пружине жёсткостью $k = 10$ Н/м получаем $\omega = \sqrt{10/0,1} = 10$ рад/с и период $T \approx 0,63$ с.

Колебание можно увидеть как тень равномерного вращения. Пусть точка бежит по окружности радиуса A с постоянной угловой скоростью ω , и в момент t её радиус повернут от оси x на угол $\omega t + \psi_0$. Проекция точки на ось x равна $A \cos(\omega t + \psi_0)$ и повторяет движение груза. Фаза при этом есть угол точки на окружности, а циклическая частота её угловая скорость. Пятая неделя видела это у тяготения: тело, которое падает в шахту через центр однородной планеты, всё время идёт точно под спутником, облетающим планету у самой поверхности.

Найдём амплитуду и фазу из начальных условий. Пусть в момент $t = 0$ груз оттянут на $x_n > 0$ и отпущен без толчка: $x(0) = x_n$, $\dot{x}(0) = 0$. Подставим это в решение:

$$A \cos(\psi_0) = x_n \quad (10)$$

$$-A\omega \sin(\psi_0) = 0 \quad (11)$$

Второе уравнение даёт $\sin \psi_0 = 0$, то есть $\psi_0 = 0$ или $\psi_0 = \pi$. Обе записи описывают одно и то же движение, потому что $A \cos(\omega t + \pi) = -A \cos \omega t$, и договоримся считать амплитуду положительной, $A > 0$. Тогда при $x_n > 0$ первое уравнение даёт $\psi_0 = 0$ и $A = x_n$, и закон движения груза

$$x(t) = x_n \cos(\omega t) \quad (12)$$

Если в начальный момент груз ещё и толкнули, амплитуда выйдет больше x_n , а начальная фаза ненулевой. Два начальных условия, координата и скорость, всегда задают два свободных числа решения, A и ψ_0 .

Найдём их в общем случае. Пусть в момент $t = 0$ груз находится в точке x_n и движется со скоростью v_n . Подставим $t = 0$ в решение и в его первую производную:

$$x(0) = A \cos \psi_0 = x_n, \quad \dot{x}(0) = -A\omega \sin \psi_0 = v_n \quad (13)$$

Это система двух уравнений для двух неизвестных, A и ψ_0 . Запишем её как $A \cos \psi_0 = x_n$ и $A \sin \psi_0 = -v_n/\omega$. Сложим квадраты уравнений, и косинус с синусом уйдут, потому что $\cos^2 \psi_0 + \sin^2 \psi_0 = 1$. Поделим второе уравнение на первое, и уйдёт амплитуда:

$$A = \sqrt{x_n^2 + \left(\frac{v_n}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_0 = -\frac{v_n}{\omega x_n} \quad (14)$$

Тангенс задаёт угол с точностью до π , поэтому четверть выбирают по знакам: при $A > 0$ косинус начальной фазы одного знака с x_n , а синус одного знака с $-v_n$. Если груз толкнули прямо из равновесия, $x_n = 0$, тангенс не определён, и $\psi_0 = -\pi/2$ при $v_n > 0$. При $v_n = 0$ и $x_n > 0$ формулы дают прежние $A = x_n$ и $\psi_0 = 0$.

Оттянем наш груз на 3 см и толкнём дальше от равновесия со скоростью 0,4 м/с. Тогда $v_n/\omega = 4$ см, амплитуда 5 см, больше начального отклонения, и $\operatorname{tg} \psi_0 = -4/3$. Косинус фазы положителен, синус отрицателен, и $\psi_0 \approx -0,93$ рад, около -53° .

Заметим, что период от амплитуды не зависит. В период входят только масса и жёсткость, амплитуды в нём нет. Оттянем груз на 1 см или на 5 см, и в обоих случаях он вернётся через те же 0,63 с. Оттянутый дальше груз проходит больший путь, но и сила на нём во столько же раз больше, и одно уравнивает другое. Третья неделя уже встречала это свойство: мяч с линейной оболочкой отскакивает от стены за время $\pi\sqrt{m/k}$, полпериода, при любой скорости налёта. Пятая назвала его у упругой силы, растущей пропорционально расстоянию до центра: все орбиты у неё замкнуты, и период от размера орбиты не зависит (конспект пятой недели, раздел об обратном квадрате и других законах). У маятника на большой амплитуде период уже растёт (раздел о периоде на большой амплитуде).

Скажем, что требует гармоничности. Из примера с пружиной не следует, что колебаниям нужна сила, пропорциональная смещению. Колебания возникают около любого устойчивого равновесия, если систему из него вывели, а трение мало. Пропорциональность силы смещению делает их гармоническими: закон движения тогда косинус, и период от амплитуды не зависит. Без пропорциональности колебания остаются, но у силы, симметричной относительно равновесия, период начинает зависеть от амплитуды (раздел о колебаниях без линейной силы).

Колебания без линейной силы

Пружина, сила которой пропорциональна растяжению, даёт гармонические колебания с периодом, который от амплитуды не зависит (раздел о пружинном маятнике). Что будет, если сила растёт с отклонением как-то иначе?

Возьмём три других закона силы. Пусть пружина отвечает на растяжение силой, которая растёт как квадрат растяжения: на метр она тянет назад с силой 1 Н, на десять метров уже с силой 100 Н, и на сжатие отвечает так же. Её сила $F = -k_2 x|x|$ с $k_2 = 1 \text{ Н/м}^2$. Груз массой 0,1 кг на такой пружине, лёжа на гладком столе, качается около положения, где пружина не растянута, но период у него зависит от амплитуды: при амплитуде 1 м он равен 2,17 с, при амплитуде 4 м вдвое меньше, 1,09 с.

Отношение этих чисел видно уже из размерностей, как в первой неделе (конспект первой недели, раздел о пи-теореме). Период может зависеть только от массы m , постоянной k_2 и амплитуды A : других величин у задачи нет. Постоянная k_2 измеряется в Н/м^2 , то есть в $\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)$, и из четырёх величин T , m , k_2 и A с тремя независимыми размерностями складывается одна безразмерная комбинация, $T\sqrt{k_2 A/m}$. Зависеть ей не от чего, поэтому $T = C\sqrt{m/(k_2 A)}$ с постоянным числом C , и учетверённая амплитуда даёт вдвое меньший период. Самого числа C размерности не дают (конспект первой недели, раздел о принципе инвариантности), его даёт закон сохранения энергии; вывод вынесен во врезку ниже.

Для интересующихся. Найдём число C из закона сохранения энергии. Пружина, растянутая или сжатая на $|x|$, запасает энергию $U = k_2|x|^3/3$: это работа против её силы $k_2 x^2$. Груз отпущен из покоя на амплитуде A , и закон сохранения энергии (конспект четвёртой недели, раздел о законе сохранения энергии) даёт его скорость в точке x :

$$v = \sqrt{\frac{2k_2(A^3 - |x|^3)}{3m}} \quad (15)$$

От края до положения, где пружина не растянута, груз идёт четверть периода. Время скла-

дывается из отрезков пути, делённых на скорость, $dt = dx/v$. Заменим $x = Au$:

$$T = 4 \int_0^A \frac{dx}{v} = 4 \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_2 A}} \quad (16)$$

Интеграл берётся численно и равен 1,402, поэтому $C = 4\sqrt{3/2} \cdot 1,402 = 6,87$. При $m = 0,1$ кг и $k_2 = 1$ Н/м² амплитуда 1 м даёт $T = 6,87\sqrt{0,1} = 2,17$ с, а амплитуда 4 м вдвое меньший период, 1,09 с.

Шарик в V-образном жёлобе устроен иначе: стоит ему сойти с дна, сила сразу становится конечной и дальше по модулю не меняется (рис. 3). Пусть ускорение шарика вдоль склона по модулю равно $g_{\text{ж}} = 1$ м/с². От края до дна шарик идёт равноускоренно и проходит путь A за время $\sqrt{2A/g_{\text{ж}}}$, а период вчетверо больше:

$$T = 4\sqrt{\frac{2A}{g_{\text{ж}}}} \quad (17)$$

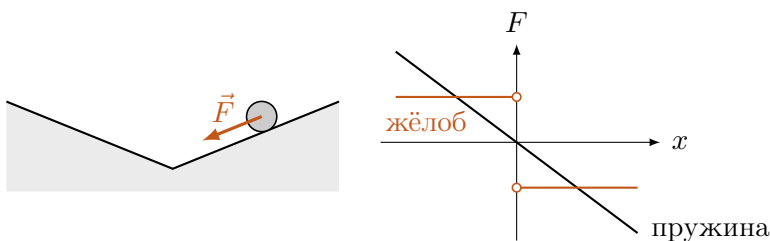


Рис. 3: Шарик в жёлобе колеблется, но в минимуме у жёлоба излом: сила вдоль стенки по модулю одна на любой высоте и у дна в ноль не уходит. На графике силы от смещения это ступенька, у пружины на её месте прямая через ноль, и линейного члена, с которого начинаются гармонические колебания, у жёлоба нет. Поэтому период жёлоба зависит от амплитуды: при ускорении вдоль стенки 1 м/с² он 1,13 с при 4 см и 0,57 с при 1 см.

При амплитуде 4 см период 1,13 с, при 1 см 0,57 с, при 2,5 мм 0,28 с. Шарик, отпущенный ближе к дну, возвращается быстрее.

Третий закон задаёт потенциальная энергия $U = cx^4$, постоянная c у неё в джоулях на метр в четвёртой степени. Сила получается из энергии, $F = -\frac{dU}{dx} = -4cx^3$, и у дна она ещё слабее, чем у пружины выше. Период обратно пропорционален амплитуде, $T = 3,71\sqrt{m/c}/A$: чем меньше амплитуда, тем медленнее колебания.

Сравним, как период зависит от амплитуды. Все три ответа объясняет одна оценка, и сделаем её динамически, по ускорению, которое сила даёт на краю. От края до дна система проходит путь порядка амплитуды A с ускорением порядка того, что сила даёт ей на краю, $|F(A)|/m$, и время прохода порядка $\sqrt{mA/|F(A)|}$. У линейной пружины ускорение на краю пропорционально A , и время от амплитуды не зависит. У жёлоба ускорение на краю постоянно, и период растёт как $\sqrt{A}$. У пружины с силой, растущей как квадрат растяжения, ускорение на краю растёт как A^2 , и период падает как $1/\sqrt{A}$; у $U = cx^4$ оно растёт как A^3 , и период падает как $1/A$. Для сил, растущих как степень смещения, оценка даёт точный закон, а числа

выше посчитаны точно. У силы, симметричной относительно равновесия, период не зависит от амплитуды, только когда она пропорциональна смещению.

Во всех трёх случаях колебания есть: равновесие устойчивое, и сила при любом отклонении тянет назад (раздел об определении колебаний). Нет гармоничности: закон движения не косинус, и одной частоты, общей для всех амплитуд, нет и при самых малых. Пропорциональность силы смещению есть условие гармонических колебаний, а не колебаний вообще. Рецепт получения частоты по кривизне потенциала здесь молчит (раздел о частоте из кривизны потенциала). У пружины с квадратичной силой и у $U = cx^4$ вторая производная потенциальной энергии на дне равна нулю, у жёлоба на дне излом, и второй производной нет вовсе. Если ту же пружину с квадратичной силой подвесить вертикально, вес растянёт её, и малые колебания около нового равновесия станут гармоническими (раздел о постоянной силе).

Выберем модель. Настоящая сила почти никогда не пропорциональна смещению в точности, и между линейной и нелинейной моделью выбирают по обычным признакам модели (конспект шестой недели, вводный раздел главы). У жёлоба и у $U = cx^4$ линейной модели нет вовсе: у силы нет линейного члена, и строить её не из чего. Где линейную модель выбирают против точной, глава разберёт у маятника на большой амплитуде (раздел о периоде на большой амплитуде).

1.3 Заменяем синус углом

Математический маятник

Точечный груз массой m висит на невесомой нерастяжимой нити длиной l и может качаться в вертикальной плоскости под действием тяжести (рис. 4). Такую модель называют математическим маятником. Положение груза задаёт угол φ между нитью и вертикалью. Путь груза вдоль дуги, отсчитанный от нижней точки, обозначим $x = l\varphi$ и назовём дуговой координатой.

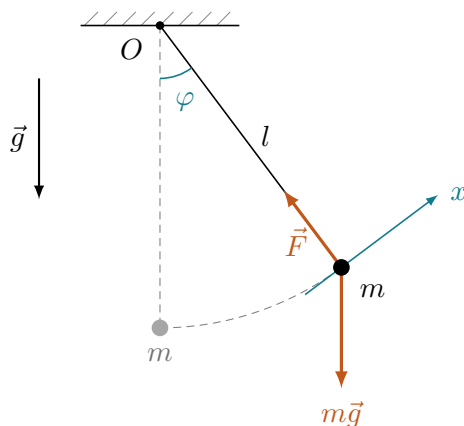


Рис. 4: Математический маятник: точечная масса m на нити, закреплённой в точке O , отклонена от вертикали на угол φ . На массу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{F}$. Стрелка x касается дуги и показывает, куда растёт дуговая координата $x = l\varphi$, отсчитанная вдоль дуги от нижней точки.

Запишем второй закон вдоль дуги. Решим задачу динамическим методом. На груз действуют тяжесть $m\vec{g}$ и натяжение нити. Натяжение направлено вдоль нити, перпендикулярно дуге, и вдоль дуги его проекция равна нулю. Проекция тяжести на касательную к дуге равна

$-mg \sin \varphi$, она направлена к нижней точке. Ускорение груза вдоль дуги есть $\ddot{x}$, и второй закон в проекции на касательную даёт

$$m\ddot{x} = -mg \sin \varphi \quad (18)$$

Масса входит в обе части и сокращается, поэтому период маятника от массы груза не зависит. Возвращающая сила пропорциональна не углу, а его синусу. Уравнение с синусом решить можно, но долго, и к нему глава вернётся в конце (раздел о периоде на большой амплитуде). Договоримся, что угол мал. Тогда синус почти равен самому углу. Синус угла есть высота, опущенная из груза на вертикаль, делённая на длину нити, а сам угол есть дуга, делённая на ту же длину, и при малом угле высота и дуга почти совпадают. Заменяв $\sin \varphi$ на φ , получим

$$\ddot{x} = -g\varphi \quad (19)$$

Длина нити постоянна, поэтому ускорение вдоль дуги $\ddot{x} = l\ddot{\varphi}$, и

$$l\ddot{\varphi} = -g\varphi \quad (20)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad (21)$$

Это уравнение пружины с g/l на месте k/m , и решение у него то же (раздел о пружинном маятнике):

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \psi_0) \quad (22)$$

где A угловая амплитуда, а циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (23)$$

Ни масса, ни амплитуда в частоту не входят: её задают только длина нити и ускорение свободного падения. Маятник длиной $l = 1$ м на Земле даёт $\omega = \sqrt{9,81} \approx 3,13$ рад/с и период $T = 2\pi\sqrt{l/g} \approx 2,01$ с; здесь и дальше глава считает с $g = 9,81$ м/с². Метод размерностей первой недели сказал, что период пропорционален $\sqrt{l/g}$, и промолчал о множителе 2π (конспект первой недели, раздел о принципе инвариантности); множитель дало решение уравнения движения.

Не спутаем частоту с угловой скоростью. Буква ω здесь не угловая скорость нити. Угловая скорость нити $\dot{\varphi}$ за период меняется от нуля в крайних точках до наибольшей в нижней, и при амплитуде 10° наибольшая равна 0,55 рад/с. Циклическая частота $\omega = 3,13$ рад/с постоянна и говорит, как быстро растёт фаза. Угловой скоростью она служит только воображаемой точке на окружности, тенью которой колебание является (раздел о пружинном маятнике).

Проверим, насколько мал малый угол. Какой угол считать малым? Удобно проверить 30° , то есть $\pi/6$. Угол равен 0,524 радиана, а его синус ровно 0,5, и синус меньше угла на 4,5 процента. Если считать малыми углы до 30° , период ошибается меньше синуса: при амплитуде 30° период настоящего маятника длиннее гармонического всего на 1,7 процента. Платим за договорённость тем, что в модели малых углов период от амплитуды не зависит, а у настоящего маятника растёт. Как он растёт, показывает кривая периода против амплитуды в конце главы (раздел о периоде на большой амплитуде).

Решим тот же маятник через моменты. Маятник можно рассматривать и как твёрдое тело на закреплённой оси, какие разбирала шестая неделя. Натянута нить держит груз на одном расстоянии от точки подвеса O , и груз поворачивается вокруг горизонтальной оси, которая проходит через O перпендикулярно плоскости качаний. Этот взгляд и приведёт главу к физическому маятнику, у которого на оси качается тело любой формы (раздел о физическом маятнике). Для такого тела шестая неделя дала уравнение моментов в проекции на ось, $I_z \varepsilon = M_z$: скорость изменения момента импульса относительно оси равна моменту сил относительно неё, а момент импульса равен моменту инерции относительно оси, умноженному на угловую скорость (конспект шестой недели, раздел о моменте инерции). Это тот же динамический метод, записанный для угла. Натяжение нити проходит через ось и момента относительно неё не даёт (конспект пятой недели, раздел об уравнении моментов). Момент тяжести относительно оси подвеса равен $-mgl \sin \varphi$: сила mg на плечо $l \sin \varphi$, со знаком минус, потому что он поворачивает груз к вертикали. Момент инерции относительно оси подвеса глава обозначает I_A , как у тела на оси (раздел о физическом маятнике). У точечного груза $I_A = ml^2$, и

$$I_A \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad (24)$$

При малых углах ($\sin \varphi \approx \varphi$) уравнение снова принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (25)$$

Ответ тот же, что вдоль дуги. Энергетическим методом тот же маятник решён в разделе о динамическом и энергетическом методах, и частота совпала и там.

На закреплённой оси вращение похоже на движение вдоль прямой, но только в проекции на ось: углу отвечает координата, угловой скорости скорость, моменту инерции масса, моменту силы сила (конспект шестой недели, раздел о моменте инерции). Этим словарём глава пользуется, когда на оси качается не точка, а тело (раздел о физическом маятнике).

1.4 Перейдём от груза к заряду

Электромагнитные колебания

Могут ли колебания обойтись без механики, без груза, нити и пружины? Возьмём электрический контур из конденсатора ёмкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 5); сопротивление проводов считаем равным нулю. Такой контур называют LC-контуром. Зарядим конденсатор и замкнём контур. Конденсатор начнёт разряжаться через катушку, и ток в ней вырастет. Когда заряд конденсатора пройдёт через ноль, ток не прекратится сразу: катушка его поддержит, и конденсатор перезарядится с обратным знаком. Потом всё повторится в обратную сторону. Энергия при этом переходит от электрического поля конденсатора к магнитному полю катушки и обратно.

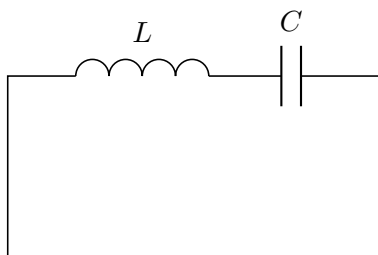


Рис. 5: Контур из конденсатора и катушки для электромагнитных колебаний: заряд перетекает с одной обкладки конденсатора C на другую через катушку L , и энергия переходит от электрического поля к магнитному и обратно.

Закон здесь не механический. Уравнение даёт правило для напряжений в замкнутом контуре, второе правило Кирхгофа, вместе с законом электромагнитной индукции; оба курса разберёт во втором семестре, а здесь они взяты готовыми. По роли это динамический метод: уравнение для заряда выписывается сразу, без энергии (раздел о динамическом и энергетическом методах). Обозначим q заряд той обкладки конденсатора, к которой течёт ток I , тогда $I = dq/dt$. ЭДС самоиндукции катушки равна напряжению на конденсаторе:

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} \quad (26)$$

Подставив $I = dq/dt$, получим

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad (27)$$

Это то же уравнение, что у груза на пружине (раздел о пружинном маятнике): заряд стоит на месте координаты, ток на месте скорости. Возвращает систему к нулю конденсатор. Напряжение q/C гонит заряд назад, и величина $1/C$ играет роль жёсткости. Инерцию даёт катушка: ЭДС $-L dI/dt$ не даёт току ни вырасти, ни пропасть мгновенно, и заряд проскакивает ноль, как груз проскакивает равновесие. Индуктивность L играет роль массы. Решение то же, что у пружины:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \psi_0) \quad (28)$$

где q_0 наибольший заряд конденсатора, а циклическая частота

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (29)$$

Для контура с $L = 1$ мГн и $C = 1$ мкФ получаем $\omega = 1/\sqrt{10^{-3} \cdot 10^{-6}} \approx 3,2 \cdot 10^4$ рад/с: около пяти тысяч полных колебаний в секунду, период 0,2 мс.

Закон у контура электрический, у груза упругий, у маятника тяготение, а уравнение у всех одно (раздел о математическом маятнике). Почему так выходит, объясняет кривизна потенциала (раздел о частоте из кривизны потенциала).

1.5 Найдём частоту по кривизне

Динамический и энергетический методы

Как найти частоту колебаний системы, не угадывая каждый раз решение заново? У пружины, маятника и контура уравнение вышло одно и то же. Найти его можно двумя методами, динамическим и энергетическим, и оба приводят к одному уравнению и к одной частоте.

Найдём частоту из уравнения движения. В динамическом методе сначала находят равновесие x_0 , положение, в котором сила на систему равна нулю. Потом выводят систему из него на малое смещение x и записывают уравнение движения: второй закон Ньютона (конспект третьей недели, раздел о втором законе), а для тела на оси уравнение моментов (конспект шестой недели, раздел о моменте инерции). Возвращающая сила зависит от смещения. В равновесии она равна нулю, и при малом x от неё остаётся член, пропорциональный смещению:

$$F(x_0 + x) \approx -\kappa x, \quad \kappa = - \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} \quad (30)$$

Число κ называют жёсткостью системы, у груза на пружине это k . Меру инерции обозначим α , она стоит в уравнении при ускорении: масса m у груза, момент инерции I_A у тела на оси, индуктивность L у контура. Уравнение движения принимает вид

$$\alpha \ddot{x} + \kappa x = 0 \quad (31)$$

Сравнив его с уравнением пружины $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, читаем частоту:

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{\alpha} \quad (32)$$

Формула имеет смысл, только если $\kappa/\alpha > 0$. Мера инерции положительна, поэтому условие требует $\kappa > 0$: смещённую систему сила тянет назад, и равновесие устойчивое. Если $\kappa < 0$, уравнение принимает вид $\alpha \ddot{x} = |\kappa| x$, и отклонение растёт экспонентой, как у перевёрнутого маятника (раздел о частоте из кривизны потенциала). Если $\kappa = 0$, линейного члена у силы нет, и метод частоты не даёт, хотя колебания могут быть (раздел о колебаниях без линейной силы). Динамический метод работает и тогда, когда энергия не сохраняется, например с трением (раздел о затухающих колебаниях), но требует выписать все силы.

Найдём частоту из энергии. В энергетическом методе начинают с энергии. Если трения нет, полная энергия системы сохраняется (конспект четвёртой недели, раздел о законе сохранения энергии): $E = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 + U(x_0 + x)$, где x , как и в динамическом методе, смещение от равновесия x_0 . Меру инерции α читают из кинетической энергии. Потенциальную энергию раскладывают около равновесия x_0 . Её первая производная там равна нулю: равновесие стоит там, где $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} = 0$ (раздел об определении колебаний). Первым после постоянной поэтому идёт квадратичный член:

$$U(x_0 + x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} x^2 \quad (33)$$

Отсчитаем энергию от $U(x_0)$ и обозначим $\kappa = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}$. Тогда

$$\frac{\alpha\dot{x}^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2} = E \quad (34)$$

Энергия постоянна, и её производная по времени равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha\dot{x}^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2} \right) = 0 \quad (35)$$

Раскрыв производную, получим

$$\alpha \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + \kappa x \frac{dx}{dt} = 0 \quad (36)$$

Скорость $\dot{x}$ стоит множителем в обоих членах и обращается в ноль только в отдельные моменты. Сократив её, получаем то же уравнение $\alpha \ddot{x} + \kappa x = 0$ и ту же частоту $\omega^2 = \kappa/\alpha$. Практическую силу методу даёт обратный ход: записав энергию системы в виде «квадрат скорости с коэффициентом плюс квадрат смещения с коэффициентом», читают α и κ прямо из этой записи и получают частоту, не выписывая сил. Это короче динамического метода там, где сил много, а энергия пишется сразу: силы реакции, которые работы не совершают, в энергию не входят.

Свяжем жёсткость с кривизной. Равенство, которое энергия дала до сокращения скорости, есть уравнение динамического метода, умноженное на скорость, поэтому методы и дают одну частоту. Буква κ в них означает одно и то же. Сила есть минус производная потенциальной энергии, $F = -\frac{dU}{dx}$ (конспект четвёртой недели, раздел о силе и потенциальной энергии), и жёсткость динамического метода равна второй производной потенциальной энергии в равновесии:

$$\kappa = - \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} \quad (37)$$

Вторую производную потенциальной энергии в равновесии глава называет кривизной потенциала. Что она задаёт частоту у всякой системы около минимума, разобрано в разделе о частоте из кривизны потенциала.

Решим пружину и маятник обоими методами. Пружина. Динамическим методом: сила $-kx$, жёсткость $\kappa = k$, инерция $\alpha = m$ (раздел о пружинном маятнике). Энергетическим: кинетическая энергия груза равна $m\dot{x}^2/2$, потенциальная $kx^2/2$, и

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \quad (38)$$

Отсюда $\alpha = m$, $\kappa = k$ и $\omega^2 = k/m$: ответ совпал с динамическим.

Математический маятник. Динамическим методом частота найдена дважды, вдоль дуги и через моменты, $\omega^2 = g/l$ (раздел о математическом маятнике). Энергетическим: кинетическая энергия груза равна $I_A \dot{\varphi}^2/2$, где $I_A = ml^2$ момент инерции груза относительно оси подвеса, а потенциальная энергия тяжести растёт с подъёмом груза на $l(1 - \cos \varphi)$:

$$\frac{I_A \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = E \quad (39)$$

При малых углах $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Это и есть разложение потенциальной энергии до квадратичного члена: линейного члена нет, потому что нижнее положение есть равновесие, а кривизна $\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_0 = mgl$. Энергия принимает вид

$$\frac{I_A \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2} = E \quad (40)$$

Отсюда $\alpha = I_A$, $\kappa = mgl$ и

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I_A} \quad (41)$$

С $I_A = ml^2$ частота сводится к $\omega^2 = g/l$: ответ снова совпал с динамическим. У тела на оси энергия пишется так же, только поднимается его центр масс. Длину нити l в потенциальной энергии тогда заменяет расстояние a от оси до центра масс, а I_A становится моментом инерции тела относительно оси подвеса (раздел о физическом маятнике).

Частота из кривизны потенциала

Груз на пружине, маятник, тело на оси и электрический контур подчиняются разным законам, а уравнение у них вышло одно. Почему?

Посмотрим на дно ямы. Ответ даёт энергетический метод (раздел о динамическом и энергетическом методах). Пусть положение системы задаёт одна координата x , кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$, а потенциальная $U(x)$. У устойчивого равновесия x_0 потенциальная энергия имеет минимум (рис. 6). Первая производная в минимуме равна нулю, и разложение U по смещению начинается сразу с квадратичного члена: около дна гладкая яма с точностью до постоянной $U(x_0)$ неотличима от параболы $\frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2$. Энергия системы принимает тот же вид, что у груза на пружине, и частота читается из неё:

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_0} \quad (42)$$

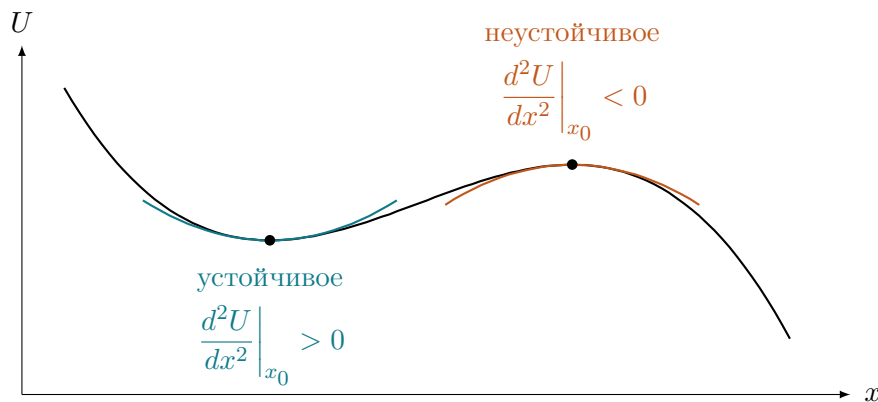


Рис. 6: Около точки равновесия кривую $U(x)$ не отличить от параболы с той же второй производной $\frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_0}$, а движение в параболической яме решается до конца. У дна ямы $\frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_0} > 0$: равновесие устойчиво, система около дна колеблется, и частоту задают кривизна и инерция. На вершине $\frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_0} < 0$, парабола перевернута, и малое отклонение растёт, как у перевернутого маятника.

Вторая производная $\frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_0}$ в рецепте есть кривизна потенциала, она же жёсткость κ динамического метода (раздел о динамическом и энергетическом методах).

Законы, по которым устроены системы, входят в частоту только двумя числами: кривизной у дна и мерой инерции, которая стоит в кинетической энергии. У груза мера инерции есть масса m , у маятника ml^2 , у тела на оси момент инерции I_A (раздел о физическом маятнике), у двух тел на пружине приведённая масса μ (раздел о двух тележках на пружине), у контура индуктивность L . Кривизна у дна равна k у пружины и mg/l у маятника, а у контура это $1/C$ (раздел об электромагнитных колебаниях): потенциальной энергией там служит энергия конденсатора $q^2/2C$, кинетической энергия катушки $LI^2/2$, и обе разберёт второй семестр. У маятника кривизна mg/l и инерция ml^2 растут с массой одинаково, и масса из частоты уходит: груз внятеро тяжелее качается с прежним периодом, как в опыте первой недели. Без инерции рецепт был бы неверен: у маятника кривизна растёт с массой, а частота нет.

Отличим кривизну потенциала от кривизны пути. Слово «кривизна» курс уже занимал. Во второй неделе кривизна пути равна $1/R$ и меряется в обратных метрах (конспект второй недели, раздел о нормальном и тангенциальном ускорении). Если координата есть длина, кривизна потенциала $\frac{d^2U}{dx^2}$ меряется в джоулях на квадратный метр, то есть в ньютонах на метр, как жёсткость. У угла она в джоулях, у заряда в обратных фарадах, а размерность $\omega^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{d^2U}{dx^2}$ от выбора координаты не меняется. Сходятся две кривизны у дна чаши. Пусть точка массой m движется в потенциале $mg y(x)$, где $y(x)$ профиль чаши, а радиус кривизны дна равен R . Тогда $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{mg}{R}$, инерция m , и $\omega^2 = g/R$. Чаша с радиусом дна 1 м качается с периодом 2,01 с, как метровый маятник: груз маятника и есть точка на дне чаши радиуса l .

Четвёртая неделя показала это числами. Там две чаши, высота которых растёт как квадрат расстояния от центра, обе полушириной 1 м, мелкая глубиной 5 см и глубокая глубиной 1,5 м. Кривизна дна у глубокой больше в 30 раз, и точка в её потенциале качается с периодом 1,16 с против 6,34 с в мелкой, в $\sqrt{30} = 5,48$ раза быстрее. Потенциал точки там точная парабола, и период от амплитуды не зависит. Тело, скользящее по горке той же формы, качается так только при малой амплитуде (конспект четвёртой недели, раздел о силе и потенциальной энергии), а что даёт большая, сказано у маятника (раздел о периоде на большой амплитуде).

Перевернём яму. Если в равновесии у потенциальной энергии максимум, кривизна отрицательна (рис. 6). Энергия около вершины равна $\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{d^2U}{dx^2}\right|(x-x_0)^2$, и её производная по времени даёт уравнение $\alpha\ddot{x} = \left|\frac{d^2U}{dx^2}\right|(x-x_0)$: ускорение направлено от равновесия, и отклонение растёт экспонентой $e^{\lambda t}$ с $\lambda = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\left|\frac{d^2U}{dx^2}\right|}$. Поставим грузом вверх метровый маятник на лёгком

стержне. Кривизна у вершины равна $-mg/l$ при той же инерции ml^2 , и $\lambda = \sqrt{g/l}$: экспонента набирает множитель e за 0,32 с. Маятник, отпущенный из покоя у вершины, уходит от неё медленнее, в e раз за 0,53 с (раздел об определении колебаний). Его отклонение есть полусумма растущей и гаснущей экспонент, и гаснущая поначалу сдерживает рост.

Так же падала фабричная труба в задаче шестой недели («Падающая труба»). Потенциальная энергия трубы, стоящей на основании и отклонённой от вертикали на угол φ , равна $mg\frac{l}{2}\cos\varphi$. У вертикали она имеет максимум с кривизной $-mg/l/2$, момент инерции трубы относительно оси у основания $ml^2/3$, и малое отклонение растёт с $\lambda = \sqrt{3g/2l}$. Это согласуется с

угловым ускорением $\varepsilon = (3g/2l) \sin \varphi$, найденным там (угол в задаче назван α).

Брус, раскрученный вокруг средней оси, тоже уходит от исходного вращения экспонентой (конспект шестой недели, раздел о вращении без опор), но кривизна потенциала об этом ничего не говорит. Потенциальной энергии со своим минимумом у свободного вращения нет, и рост там решает знак коэффициента при отклонении в уравнении движения. Признак по энергии там прямо обманул бы: при том же моменте импульса энергия вращения больше всего у оси наименьшего момента, а вращение вокруг неё устойчиво. Так же, экспонентой, растёт малое возмущение треугольника Лагранжа в задаче трёх тел третьей недели. Треугольник тоже вращается как целое, покоя у него нет, и рост там тоже решает уравнение движения.

Узнаем, где рецепт молчит. Рецепту нужна кривизна на дне, $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} > 0$. У ямы $U = cx^4$ кривизна на дне равна нулю, у V-образного жёлоба на дне излом, и второй производной нет вовсе. Колебания там есть, равновесие устойчивое, но одной частоты нет, и период зависит от амплитуды, как бы мала она ни была (раздел о колебаниях без линейной силы).

Пятая неделя разложила потенциальную энергию тяжести по высоте и остановилась на линейном члене, mgh (конспект пятой недели, раздел об энергии тяготения). У поверхности Земли тело не в равновесии, и линейный член работает. В равновесии он равен нулю, и первым работает следующий, квадратичный. Там же, в пятой неделе, тело падало в шахту через однородную планету и качалось, как груз на пружине. В однородной планете сила растёт пропорционально расстоянию до центра на всём пути, потенциальная энергия есть точная парабола, и рецепт верен при любой амплитуде. У маятника и у большинства систем парабола есть только у дна, и рецепт верен, пока отклонение мало.

Восьмая неделя возьмёт закон Гука первым членом разложения силы упругости (конспект восьмой недели, раздел о законе Гука). Почему первый член линеен, видно отсюда: недеформированное тело находится в устойчивом равновесии, и его упругая энергия начинается с квадратичного члена.

Граница строгости. Уравнения колебаний дают законы, которые курс уже ввёл: второй закон Ньютона и уравнение моментов на закреплённой оси. Контур берёт правило для напряжений и закон электромагнитной индукции из второго семестра.

Договорённостей у главы две: отклонение от равновесия мало, и трение линейно по скорости. У маятника в воздухе, где число Рейнольдса не мало, вторая тоже требует малой амплитуды, но меряет её другим масштабом: сопротивление среды линейно по скорости, пока амплитуда мала против размера тела, а не против длины нити (раздел о затухающих колебаниях). У шара радиусом 3 см на метровой нити это десятые доли градуса, тогда как синус заменяют углом до 30° .

Без доказательства глава берёт полноту решений. Косинус с двумя свободными постоянными исчерпывает все решения уравнения пружины, и так же решения уравнения с трением, по виду на каждый режим (раздел о трёх режимах затухания), исчерпывают все его решения. Держится это на теореме единственности: координата и скорость в начальный момент задают решение однозначно, а двух постоянных хватает, чтобы подогнать под любые начальные условия.

От малых величин второй недели малое отклонение отличается тем, что оно конечно. Там малое делили на малое и переходили к пределу, и результат был точным (конспект второй недели, раздел о мгновенной скорости). Здесь отклонение остаётся конечным, и у приближения есть цена: у маятника она видна в периоде (раздел о периоде на большой амплитуде). Вывод с оценкой этой цены вынесен во врезку ниже.

Для интересующихся. Выведем рецепт с оценкой отброшенного. Пусть кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}\alpha(x)\dot{x}^2$: у многих систем мера инерции зависит от положения. Обозначим смещение $\xi = x - x_0$ и разложим энергию около равновесия до членов третьего порядка по малым ξ и $\dot{\xi}$:

$$E = U(x_0) + \frac{1}{2}\alpha(x_0)\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}\xi^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x_0}\xi\dot{\xi}^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x_0}\xi^3 \quad (43)$$

Члена, линейного по ξ , нет, потому что $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$. Два переменных члена второго порядка повторяют энергию груза на пружине с инерцией $\alpha(x_0)$ и жёсткостью $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}$. Здесь и ниже производные по x взяты в равновесии x_0 . Если отбросить члены третьего порядка, производная энергии по времени равна $\dot{\xi}\left(\alpha(x_0)\ddot{\xi} + \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}\dot{\xi}\right)$. Она равна нулю всё время, а $\dot{\xi}$ обращается в ноль только в отдельные моменты, поэтому скобка равна нулю всегда, и $\omega^2 = \frac{1}{\alpha(x_0)}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}$.

Отброшенные члены малы против оставленных, пока $|\xi| \ll 3\frac{d^2U}{dx^2} / \left|\frac{d^3U}{dx^3}\right|$ и $|\xi| \ll \alpha(x_0) / \left|\frac{d\alpha}{dx}\right|$. У маятника мера инерции ml^2 от угла не зависит, а потенциальная энергия $mgl(1 - \cos\varphi)$ симметрична, и $\left.\frac{d^3U}{d\varphi^3}\right|_0 = 0$. Первый отброшенный член у него четвёртого порядка, $-mgl\varphi^4/24$, и его доля в потенциальной энергии равна $\varphi^2/12$. При амплитуде 30° это 2,3 процента, а период при этой амплитуде длиннее гармонического на 1,7 процента. Ошибка периода того же порядка, что доля отброшенного члена в энергии.

1.6 Нарисуем движение на фазовой плоскости

Фазовый портрет

Можно ли увидеть всё движение осциллятора одной картинкой, а не графиком по времени? Отложим по одной оси координату x , по другой скорость $\dot{x}$. Плоскость с такими осями называют фазовой плоскостью. Каждая её точка задаёт состояние системы, положение вместе со скоростью, и с течением времени точка состояния чертит кривую, фазовую траекторию. Траектории при разных начальных условиях вместе составляют фазовый портрет (рис. 7).

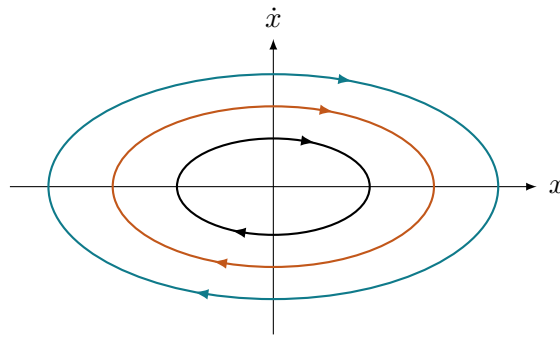


Рис. 7: Фазовая траектория для свободных колебаний: в координатах x и $\dot{x}$ состояние системы бежит по эллипсу, своему для каждой энергии. Стрелки показывают направление обхода: по часовой стрелке.

Траекторию осциллятора без трения даёт энергия, которая у него сохраняется (раздел о динамическом и энергетическом методах):

$$\frac{\alpha \dot{x}^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2} = E \quad (44)$$

При постоянной E это уравнение эллипса. Его полуось по координате $\sqrt{2E/\kappa}$ есть амплитуда A , полуось по скорости $\sqrt{2E/\alpha}$ есть наибольшая скорость ωA . У груза на пружине из начала главы, оттянутого на 5 см, эллипс идёт от -5 до 5 см по координате и от $-0,5$ до $0,5$ м/с по скорости (раздел о пружинном маятнике). Если отложить по осям $\sqrt{\kappa}x$ и $\sqrt{\alpha}\dot{x}$, эллипс становится окружностью радиуса $\sqrt{2E}$. В осях, где энергия есть окружность, четвёртая неделя считала соударения шаров, только по осям там стояли скорости двух шаров, $\sqrt{M}V$ и $\sqrt{m}v$. Число π , которое выписывают удары, то же, что в периоде колебаний (конспект четвёртой недели, раздел об упругом ударе на прямой).

Каждой энергии отвечает свой эллипс: чем больше энергия, тем он шире. Эллипсы вложены друг в друга и не пересекаются, через каждую точку плоскости проходит одна траектория. Обход идёт по часовой стрелке. В верхней полуплоскости скорость $\dot{x}$ положительна, координата растёт, и точка движется вправо, а в нижней влево.

Кривая замкнута, потому что энергия сохраняется. Точка состояния не может уйти с линии своей энергии и, обойдя её, возвращается туда, откуда начала, после чего движение повторяется. Замкнутая траектория означает строго периодическое движение. Замкнутость даёт сохранение энергии, а форму эллипса квадратичная потенциальная энергия: у маятника на большой амплитуде траектории остаются замкнутыми, но эллипсами быть перестают (раздел о периоде на большой амплитуде). Трение отнимает энергию, и траектория размыкается в спираль, которая сходится к равновесию (раздел о трёх режимах затухания).

1.7 Подвесим тело на ось

Физический маятник

Шестая неделя обещала, что маятник возьмёт угол, момент инерции I_A и произведение ma готовыми (конспект шестой недели, итоговый раздел главы). Что из этого задаёт инерцию, а что жёсткость? Подвесим твёрдое тело на неподвижную горизонтальную ось, проходящую через точку A (рис. 8). Центр масс C лежит на расстоянии a от оси, угол φ отсчитаем между отрезком AC и вертикалью. Такое тело называют физическим маятником.

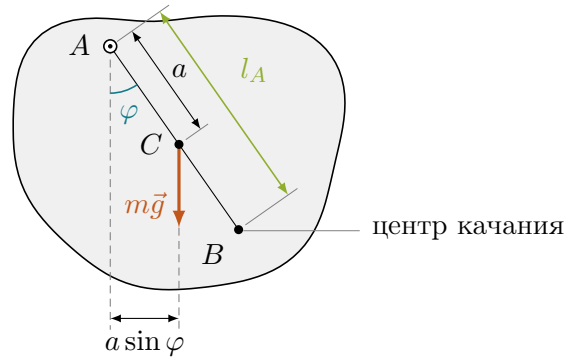


Рис. 8: Тело качается на оси через точку A , центр масс C лежит на расстоянии a от оси, а плечо силы тяжести равно $a \sin \varphi$. Центр качания B лежит на продолжении AC за центром масс, на эффективной длине l_A от оси: подвешенное за B , тело качается с тем же периодом.

Уравнение выведем динамическим методом, из уравнения моментов для закреплённой оси, $I_z \varepsilon = M_z$ (конспект шестой недели, раздел о моменте инерции). Ось подвеса проходит через A , и момент инерции тела относительно неё обозначим I_A . Это момент относительно оси: полярный момент относительно точки шестая неделя ввела как другую величину, и путать их нельзя (конспект шестой недели, раздел о моментах инерции по трём осям). Сила реакции оси проходит через ось и момента не даёт. Сила тяжести приложена в центре масс, её плечо относительно оси равно $a \sin \varphi$ и меняется с углом, а расстояние a плечом не является. Момент тяжести в проекции на ось поворачивает тело к вертикали, и по правилу знаков шестой недели он равен $-mga \sin \varphi$:

$$I_A \ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi \quad (45)$$

В равновесии, при $\varphi = 0$, момент равен нулю. Разложим его около равновесия: первым остаётся линейный член, $-mga \sin \varphi \approx -mga \varphi$. Уравнение принимает вид $\alpha \ddot{\varphi} + \kappa \varphi = 0$ с инерцией $\alpha = I_A$ и жёсткостью $\kappa = mga$ (раздел о динамическом и энергетическом методах), и квадрат частоты равен

$$\omega^2 = \frac{mga}{I_A} \quad (46)$$

Обещание шестой недели разложилось на две части. Момент инерции I_A стоит при ускорении и задаёт инерцию. Произведение ma вместе с g задаёт жёсткость. Масса входит в обе части и сокращается, потому что I_A ей пропорционален: период физического маятника от массы не зависит, как и период груза на нити.

Груз на нити длиной l качается с $\omega^2 = g/l$ (раздел о математическом маятнике). С той же частотой, что наше тело, качался бы груз на нити длиной

$$l_A = \frac{I_A}{ma} \quad (47)$$

Её называют эффективной длиной физического маятника, в учебниках чаще приведённой. По теореме Гюйгенса–Штейнера (конспект шестой недели, раздел о переносе оси)

$$I_A = I_C + ma^2 \quad (48)$$

где I_C есть момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси подвеса. Тогда

$$\omega^2 = \frac{mga}{I_C + ma^2} \quad (49)$$

и эффективная длина

$$l_A = a + \frac{I_C}{ma} \quad (50)$$

Проверим два предельных случая. У точечного груза на нити $I_C = 0$, и $l_A = a$: математический маятник восстанавливается. Если подвесить тело за центр масс, $a \rightarrow 0$, момент тяжести исчезает при любом угле и равновесие становится безразличным. Колебаться телу не с чего: эффективная длина уходит в бесконечность, частота в ноль.

Математический маятник проще: ему хватает одной длины. Шар радиусом 3 см, центр которого висит в метре от оси, имеет $I_C = \frac{2}{5}mr^2$, и его эффективная длина больше метра на 0,36 мм, а период длиннее, чем у точки, на 0,02 процента. Пока такой поправки не видно в опыте, бритва Оккама оставляет точку на нити, а телу размером с подвес нужен физический маятник.

Найдём наименьший период. Будем переносить ось вдоль прямой, проходящей через центр масс. Эффективная длина $l_A = a + I_C/(ma)$ складывается из двух слагаемых: первое растёт с a , второе убывает. Их сумма наименьшая, когда они равны, при $a = \sqrt{I_C/m}$. Это расстояние называют радиусом инерции тела. На нём эффективная длина равна двум радиусам инерции, и период наименьший. Ближе к центру масс период снова растёт: момент инерции к центру масс убывает, но возвращающий момент mga убывает быстрее.

Возьмём однородный тонкий стержень длиной $l = 1$ м с осью, перпендикулярной стержню. Относительно оси через середину $I_C = ml^2/12$ (конспект шестой недели, раздел о моменте инерции стержня), радиус инерции $l/\sqrt{12} = 0,289$ м, и подвешенный в этой точке стержень качается с наименьшим периодом, 1,52 с. Подвешенный за конец, он качается с периодом 1,64 с, а в 5 см от середины с периодом 2,63 с (рис. 9).

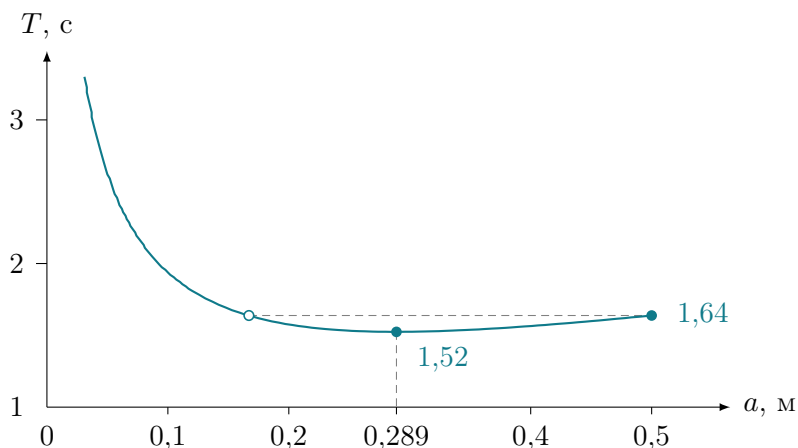


Рис. 9: Период метрового стержня на оси, удалённой на a от центра масс, с удалением оси сначала падает, потом растёт: наименьший, 1,52 с, он при $a = 0,289$ м, на радиусе инерции, а при оси через конец равен 1,64 с. У самого центра масс период уходит в бесконечность: момент силы тяжести там исчезает, а момент инерции остаётся. Тот же период 1,64 с стержень даёт и при $a = 0,167$ м (штрих), и произведение двух таких расстояний равно квадрату радиуса инерции; на этом стоит оборотный маятник.

Подвесим тело за центр качания. Отложим от оси эффективную длину l_A по прямой AC за центр масс и обозначим полученную точку B . Её называют центром качания. Подвесим тело

на ось через B , параллельную прежней. Расстояние от новой оси до центра масс равно $l_A - a$, и по теореме Гюйгенса–Штейнера

$$I_B = I_C + m(l_A - a)^2 \quad (51)$$

Квадрат частоты

$$\omega^2 = \frac{mg(l_A - a)}{I_C + m(l_A - a)^2} \quad (52)$$

и эффективная длина

$$l_B = \frac{I_C}{m(l_A - a)} + (l_A - a) \quad (53)$$

Из выражения для l_A видно, что $l_A - a = I_C/(ma)$. Подставим это в первое слагаемое, и оно обратится в a :

$$l_B = a + \frac{I_C}{ma} = l_A \quad (54)$$

Подвешенное за центр качания, тело качается с тем же периодом. У стержня, подвешенного за конец, центр качания лежит в двух третях длины от оси, $l_A = 0,667$ м.

Обратное утверждение верно не всегда. Пусть период задан, то есть задана эффективная длина l_A . Расстояние h от оси до центра масс, при котором она получается, удовлетворяет условию $h + I_C/(mh) = l_A$, то есть уравнению

$$h^2 - l_A h + \frac{I_C}{m} = 0 \quad (55)$$

Корней у него два, a и b , и по теореме Виета $a + b = l_A$, $ab = I_C/m$. Оси на расстояниях a и b от центра масс по разные стороны от него и есть точка подвеса и центр качания, а расстояние между ними равно l_A . Тот же период даёт и ось на расстоянии a по другую сторону от центра масс, потому что эффективная длина зависит только от расстояния до него. Две опоры с равными периодами получаются поэтому двумя способами: при $ab = I_C/m$ и при $b = a$.

Телефон 15×7 см, тот же, что подбрасывала шестая неделя (конспект шестой недели, раздел о вращении без опор), подвешенный за угол и качающийся в своей плоскости, имеет период 0,67 с. Все четыре угла лежат на одном расстоянии от центра масс, 8,28 см, и за любой из них период тот же по симметрии: это случай $b = a$, а не свойство центра качания. Центр качания лежит на диагонали в 11,0 см от угла, ровно в двух третях её длины, в 2,8 см за центром масс, и подвесить телефон за него можно только сквозь отверстие.

Измерим g обратным маятником. Равенство периодов тела, подвешенного за точку A и за центр качания B , даёт способ измерить ускорение свободного падения прибором, который называют обратным маятником (рис. 10). Мерить g точно приходится потому, что от места к месту оно разное. Точка на экваторе идёт по окружности с центростремительным ускорением около $0,034$ м/с², три с половиной тысячных от g (конспект третьей недели, раздел о первом законе), к тому же Земля не шар. Вместе это даёт $9,78$ м/с² на экваторе против $9,83$ м/с² на полюсе. Периоды одного маятника там отличаются на 0,26 процента, и маятник, отбивающий секунды на полюсе, на экваторе за сутки отстанет почти на четыре минуты. Чтобы мерить g с такой точностью, нужна и длина маятника, известная с той же точностью, а у настоящего груза неизвестно, где именно лежит центр масс и чему равен I_C .

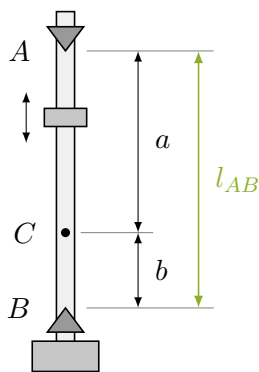


Рис. 10: Маятник висит на призме A, а призма B смотрит остриём ей навстречу, и на неё ложится перевёрнутый маятник. Подвижный груз сдвигают, пока периоды на двух призмах не совпадут, и тогда расстояние l_{AB} между призмами равно эффективной длине: где лежит центр масс C , знать не нужно. Призмы стоят по разные стороны от C на неравных расстояниях, $a \neq b$: при симметричных опорах периоды тоже совпали бы, но l_{AB} эффективной длиной не была бы.

Оборотный маятник обходит эту трудность. Это тело с двумя опорными призмами, на любую из которых его можно подвесить. Призмы ставят по разные стороны от центра масс на неравных расстояниях от него и сдвигают груз на теле, пока периоды на двух призмах не совпадут. Тогда призмы стоят в точке подвеса и в центре качания, расстояние между ними l_{AB} равно эффективной длине, и

$$g = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 l_{AB} \quad (56)$$

Ни положения центра масс, ни момента инерции знать не нужно, а расстояние между призмами меряется точно. Приближение малых углов при этом остаётся, поэтому маятник качают с малой амплитудой: при 2° период длиннее гармонического на 0,008 процента.

Ловушку ставит симметричная пара опор. Однородный стержень длиной 1 м с призмами в 0,40 м от середины по разные стороны от неё качается на обеих с одним периодом, 1,565 с. Расстояние между призмами 0,8 м, а эффективная длина 0,608 м, и g по этой паре выйдет завышенным на 31,5 процента. Поэтому оборотный маятник делают несимметричным, с тяжёлым грузом ближе к одному концу.

1.8 Добавим постоянную силу

Сдвинем равновесие постоянной силой

Во входе главы пружину и маятник отвезли на Луну (рис. 1; вводный раздел главы). Груз 0,1 кг на вертикальной пружине жёсткостью 10 Н/м растягивает её весом на 9,8 см на Земле и на 1,6 см на Луне, а период у него в обоих местах 0,63 с. Метровый маятник на Луне качается с периодом 4,94 с вместо 2,01 с на Земле. Вес груза есть постоянная сила. Когда постоянная сила только сдвигает равновесие, а когда меняет и частоту? Ответим динамическим методом (раздел о динамическом и энергетическом методах), начав с пружины.

Пусть на тело массы m действует сила $F(x)$ с равновесием в $x = 0$ и сверх неё постоянная сила F_0 . Уравнение движения $m\ddot{x} = F(x) + F_0$. Равновесие сдвигается в точку x^* , где сумма сил равна нулю, $F(x^*) = -F_0$. Разложим сумму сил около нового равновесия. Постоянные члены

сокращаются в точности, потому что в x^* сумма сил равна нулю, и первым остаётся линейный:

$$F(x) + F_0 \approx \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} (x - x^*) \quad (57)$$

Отклонение от нового равновесия подчиняется прежнему уравнению $m\ddot{x} + \kappa(x - x^*) = 0$, только жёсткость теперь равна наклону силы в новой точке, $\kappa = -\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*}$. Постоянная сила, добавленная к силе $F(x)$, меняет частоту только через этот наклон.

Нагрузим пружину весом. У пружины $F = -kx$, и наклон $-k$ одинаков во всех точках (раздел о пружинном маятнике). Направим ось x вниз и запишем для груза второй закон:

$$m\ddot{x} = -kx + mg \quad (58)$$

Правая часть обращается в нуль в новом положении равновесия x^* . Отклонение от него обозначим y :

$$x^* = \frac{mg}{k}, \quad y = x - x^* \quad (59)$$

Подставим $x = x^* + y$. Слагаемые $-kx^*$ и mg сокращаются, а $\ddot{x} = \ddot{y}$, потому что x^* постоянно, и для y остаётся уравнение пружинного маятника без веса:

$$m\ddot{y} = -ky, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (60)$$

Равновесие $x^* = mg/k = 9,8$ см, жёсткость около него прежняя, k , частота тоже, 10 рад/с. На Луне равновесие $x^* = 1,6$ см, а жёсткость и частота те же. У этой задачи есть потенциальная энергия, $U = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$, и тот же ответ читается энергетически: вес сдвинул минимум параболы, а её кривизну $\frac{d^2U}{dx^2} = k$ не тронул. Энергией вертикальную пружину разбирала задача четвёртой недели о грузе на пружине («Работа при растяжении пружины с грузом»). Правило «постоянная сила только сдвигает равновесие» верно для линейной силы, и только для неё.

Возьмём пружину, сила которой растёт как квадрат растяжения: растянутая на x , она тянет назад с силой k_2x^2 (раздел о колебаниях без линейной силы). При $k_2 = 1$ Н/м² она тянет с силой 1 Н, растянутая на метр, и с силой 100 Н, растянутая на десять метров. В ненагруженном положении наклон её силы нулевой, линейного члена нет, и жёсткости, а с ней частоты, у малых колебаний нет. Подвесим на неё груз. Равновесие встанет там, где $k_2x^{*2} = mg$, и наклон силы там уже не нуль:

$$\kappa = 2k_2x^* = 2\sqrt{mgk_2} \quad (61)$$

Постоянная сила создала жёсткость, которой у пружины не было. Груз 0,1 кг растягивает её на 0,99 м и при малой амплитуде качается около этого положения с периодом 1,41 с. Период такой пружины растёт с массой как корень четвёртой степени: груз в десять раз тяжелее качается с периодом 2,51 с. На Луне тот же груз в 0,1 кг растягивает её на 0,40 м, жёсткость там меньше, и период 2,21 с, в $(9,81/1,62)^{1/4} = 1,57$ раза длиннее земного. Возвращает груз по-прежнему упругость, а смена g частоту изменила: сила этой пружины нелинейна.

Вернёмся к маятнику на Луне. У пружины вес прибавлялся к силе упругости постоянным слагаемым. У маятника тяжесть сама возвращает груз. Спроецируем второй закон на касательную к дуге: натяжение нити в эту проекцию не входит, тяжесть даёт $-mg \sin \varphi$, а ускорение груза вдоль дуги равно $l\ddot{\varphi}$ (раздел о математическом маятнике). Около нижней точки первым остаётся линейный член, $-mg\varphi$, и после умножения на l уравнение для угла принимает вид

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \varphi, \quad \omega^2 = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l} \quad (62)$$

Инерция маятника ml^2 , жёсткость mgl , и g входит в жёсткость множителем. Без тяжести груз на нити ни к какому положению не возвращается, и смена g меняет саму возвращающую силу, а с ней жёсткость. На Луне жёсткость меньше в $9,81/1,62 = 6,06$ раза при прежней инерции, и период длиннее в $\sqrt{6,06} = 2,46$ раза, 4,94 с против 2,01 с: это ответ на вопрос входа.

В этом разделе постоянная сила меняла частоту двумя путями. Добавленная к нелинейной силе, она уводит равновесие туда, где наклон силы другой, как у пружины с квадратичной силой. Если же постоянная сила сама возвращает систему, как тяжесть возвращает маятник, жёсткость ей пропорциональна. Схема с наклоном в новом равновесии к маятнику не относится: вес у него сам служит возвращающей силой, и его составляющая вдоль дуги, $-mg \sin \varphi$, меняется с углом.

1.9 Скрепим два тела пружиной

Приведённая масса в роли инерции

До сих пор один конец пружины держала стенка. Пусть оба конца держат тела: тележки массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 3$ кг на гладкой дорожке, связанные пружиной жёсткостью $k = 20$ Н/м, как в третьей неделе. У стенки на той же пружине лёгкая тележка качалась бы с периодом 1,40 с, тяжёлая с периодом 2,43 с. С каким периодом качаются они вместе?

Запишем второй закон для каждой тележки, то есть решим задачу динамическим методом (раздел о динамическом и энергетическом методах). Пусть x_1 и x_2 координаты тележек, l_0 длина пружины без растяжения, а $s = x_2 - x_1 - l_0$ её растяжение (рис. 11). Растянутая пружина тянет первую тележку вперёд, вторую назад:

$$m_1 \ddot{x}_1 = ks, \quad m_2 \ddot{x}_2 = -ks \quad (63)$$

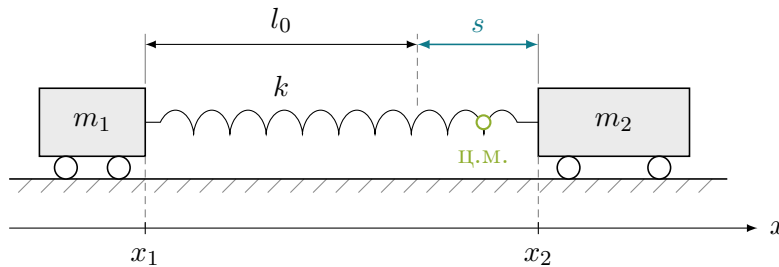


Рис. 11: Координаты x_1 и x_2 отмечены там, где к тележкам крепится пружина, и их разность равна длине пружины. Растяжение s отсчитано от конца нерастянутой пружины, так что $x_2 - x_1 = l_0 + s$, а у сжатой пружины s отрицательно. Центр масс лежит ближе к тяжёлой тележке и, пока тележки качаются, движется равномерно.

Сложим уравнения: $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$. Центр масс движется равномерно, как бы ни качались тележки (конспект третьей недели, раздел о теореме о центре масс). Теперь поделим каждое уравнение на свою массу и вычтем первое из второго: $\ddot{s} = -ks(1/m_1 + 1/m_2)$, или

$$\mu\ddot{s} + ks = 0, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (64)$$

Это уравнение груза на пружине, в котором инерцию задаёт приведённая масса μ (конспект третьей недели, раздел о двух телах), а жёсткость прежняя:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (65)$$

У наших тележек $\mu = 0,75$ кг и период 1,22 с, короче обоих периодов у стенки: приведённая масса меньше меньшей из масс. Колеблются обе тележки с этим периодом, каждая около центра масс, и амплитуды их обратно пропорциональны массам. Если сжать пружину на 0,2 м и отпустить, лёгкая тележка качается около центра масс с амплитудой 0,15 м, тяжёлая с амплитудой 0,05 м.

Проверим пределы. Когда вторая тележка бесконечно тяжела, $\mu \rightarrow m_1$, и она становится стенкой (раздел о пружинном маятнике). При равных массах $\mu = m/2$. Тот же ответ видно и без формулы: середина пружины стоит на месте, каждая тележка качается на своей половине пружины, а жёсткость половины вдвое больше, $\omega^2 = 2k/m = k/(m/2)$.

Приведённую массу ввела третья неделя для двух тел, пятая взяла её для двух звёзд на орбите (конспект третьей недели, раздел о двух телах; конспект пятой недели, раздел о двух телах на орбите). Здесь она встала инерцией в частоту. Два груза на двух последовательных пружинах решает задача этой недели «Два груза на пружинах».

1.10 Раскачаем маятник сильнее

Измерим период на большой амплитуде

До сих пор глава отбрасывала два члена: в силе всё, что выше линейного по смещению, и трение. Вернём первые. Отклоним метровый маятник на 23° и отпустим. Его период выйдет длиннее гармонического, $2\pi\sqrt{l/g} = 2,006$ с, на один процент. Отпущенный с 30° , маятник качается на 1,7 процента медленнее, с 50° на пять процентов, с 69° на десять. Отпущенный горизонтально, с 90° , он качается на 18 процентов медленнее. Период растёт с амплитудой.

Этот рост видели ещё в первой неделе. Опыты с маятником показывали, что большая амплитуда немного удлиняет период, а метод размерностей этого не ловит: угол безразмерен, и из размерностей следует только $T = \sqrt{l/g} f(\varphi_0)$ с неизвестной функцией угловой амплитуды φ_0 (конспект первой недели, раздел о принципе инвариантности). В решении для малых углов та же амплитуда обозначена A . Функцию даёт уравнение движения. При малых углах $f = 2\pi$ (раздел о математическом маятнике), а дальше она растёт.

Почему период растёт? К равновесию маятник возвращает момент тяжести, а он пропорционален синусу угла, который отстаёт от самого угла: при 30° он меньше угла на 4,5 процента. Линейное приближение отбросило в разложении $\sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$ второй член, а с ним и это отставание. У крайних точек возврат слабее гармонического, маятник задерживается там дольше, и период длиннее. У груза на пружине с линейной силой отбрасывать нечего, и его период от амплитуды не зависит при любой амплитуде, пока держится закон Гука (раздел о пружинном маятнике).

Точное уравнение маятника, $l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$, решается, и его период считается при любой амплитуде. Для главы хватает кривой и чисел выше, а формула для интересующихся вынесена во врезку ниже.

Для интересующихся. Посчитаем точный период. Выведем период энергетическим методом. Энергия маятника сохраняется: $\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi_0)$, где φ_0 амплитуда, а потенциальная энергия отсчитана от нижней точки, как в энергетическом методе (раздел о динамическом и энергетическом методах). Отсюда $\dot{\varphi}^2 = (2g/l)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$, и четверть периода есть время пути от нуля до φ_0 :

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \quad (66)$$

Подстановка $\sin(\varphi/2) = k \sin u$ с $k = \sin(\varphi_0/2)$ переводит верхний предел в $u = \pi/2$ и убирает особенность подынтегрального выражения на верхнем пределе, потому что $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2k^2 \cos^2 u$:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \quad (67)$$

Функцию $K(k)$ называют полным эллиптическим интегралом первого рода. При малой амплитуде $K \rightarrow \pi/2$, и период возвращается к $2\pi\sqrt{l/g}$. Первый член поправки даёт формулу Борда

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right) \quad (68)$$

Она ошибается в периоде меньше чем на процент до амплитуды 70° , а при 90° уже на 2,2 процента.

Дальше 90° груз на нити провисает с первого мгновения: в крайней точке нить должна тянуть его с силой $mg \cos \varphi_0$, а при таком угле эта величина отрицательна, и нити пришлось бы груз толкать. Поэтому дальше речь о грузе на лёгком стержне. Чем ближе амплитуда к 180° , тем дольше маятник стоит у верхней точки, и период растёт без предела: отпущенный с 170° , маятник качается в 2,4 раза медленнее гармонического, с 179° почти вчетверо. Траектории маятника на фазовой плоскости, как и обещал фазовый портрет (раздел о фазовом портрете), остаются замкнутыми, а эллипсами с ростом амплитуды быть перестают. Траектория с энергией $2mgl$, которой ровно хватает, чтобы дойти до верхней точки, отделяет качание от вращения, и её называют сепаратрисой. Выше неё маятник на стержне уже не качается, а вращается через верх. На самой сепаратрисе он проходит низ с наибольшей угловой скоростью $2\sqrt{g/l} = 6,26$ рад/с, а к верхней точке подходит бесконечно долго.

Для маятниковых часов рост периода замечен и при малых амплитудах. Если амплитуда маятника упала с 5° до 4° , период укорачивается на 0,017 процента, и часы за сутки уходят вперёд на 15 с. Поэтому ход часов держат при постоянной амплитуде.

Отброшенные члены возвращаются и через инерцию. У глубокой чаши четвёртой недели (раздел о частоте из кривизны потенциала) точка, движущаяся по горизонтали в её потенциале, качается 1,16 с при любой амплитуде: потенциал у неё парабола в точности. Тело, скользящее без трения по самой горке, при отклонении на 1 см качается так же, 1,16 с, а отпущенное с края, где уклон равен трём, качается 2,58 с. Потенциальная энергия у них одна, mgy , где $y(x)$ профиль чаши. Разница в инерции: тело на горке движется вдоль склона, и его кинетическая

энергия равна $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$. У дна множитель $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ равен единице, на краю десяти, и с ростом амплитуды тело становится тяжелее в координате x . Разница 2,58 с против 1,16 с есть цена амплитуды, как у маятника.

Какую модель маятника брать, гармоническую или точную? Гармоническая объясняет, как период зависит от длины и от g , и предсказывает его одной формулой. Точная объясняет сверх того рост периода, сепаратрису и вращение, но требует интеграла или счёта. Выбор решает точность, которая нужна ответу. Если секундомер ловит период с точностью до процента, при амплитуде до 23° поправки точной модели не видно, и бритва Оккама её отрезает. Тот же порог в процент стоял у волчка шестой недели: при 100 об/с точная теория поправляла формулу быстрого гироскопа примерно на процент, и поправку отрезали (конспект шестой недели, раздел о стержне на шарнире и волчке). При 69° гармоническая модель ошибается на десять процентов, и поправку отбросить уже нельзя, нужна точная модель.

1.11 Добавим вязкое трение

Затухающие колебания

Колебания в начале главы шли без трения и не кончались. Настоящий маятник останавливается. Вернём трение и посмотрим, как оно гасит колебания.

Пусть сила трения зависит от скорости тела и исчезает, когда тело стоит. Такое трение называют вязким. Разложим силу по скорости так же, как раскладывали возвращающую силу по смещению: постоянного члена нет, и первым остаётся линейный, $-\beta\dot{x}$, направленный против скорости. Коэффициент β в кг/с называют коэффициентом вязкого трения. Вязкое трение дают смазка в сочленениях механизма и воздух вокруг маятника.

Когда первого члена хватает? Для тела, которое колеблется в жидкости или газе, сила линейна по скорости, пока амплитуда мала против размера тела, при любой скорости обтекания; это показал Стокс в 1851 году, разбирая маятники. Шар радиусом 3 см на метровой нити, качающийся с амплитудой 3 мм, имеет отношение амплитуды к радиусу 0,1, и его затухание описывает этот раздел. Кривая сопротивления первой недели, которая при малых числах Рейнольдса выходит на закон Стокса, говорит об установившемся движении шара (конспект первой недели, раздел о силе вязкого трения и числе Рейнольдса). У колебаний в воздухе границу задаёт отношение амплитуды к размеру. Откуда берётся вязкость, объяснит восьмая неделя (конспект восьмой недели, раздел о вязкости).

Сухое трение устроено иначе. У тела, которое едва движется, оно не исчезает, а меняет знак вместе со скоростью, и линейного члена у него нет. Груз на пружине, скользящий по столу с коэффициентом сухого трения $\mu_{\text{тр}}$, за каждый период уменьшает амплитуду на одну и ту же величину, $4\mu_{\text{тр}}g/\omega_0^2$, где ω_0 частота без трения, и встаёт за конечное число колебаний, как только сила пружины в крайней точке окажется меньше трения покоя (конспект четвёртой недели, раздел о спуске в минимум с трением). У груза главы, с $\omega_0 = 10$ рад/с, при $\mu_{\text{тр}} = 0,1$ это 3,9 см за период, и встаёт он в пределах сантиметра от равновесия. Какую модель трения брать, решает опыт. При вязком трении за период амплитуда уменьшается в одно и то же число раз, при сухом на одну и ту же величину. Вязкая модель описывает затухание одним числом и годится, пока опыт показывает постоянное отношение соседних амплитуд; если постоянна их разность, нужна модель сухого трения. Дальше в главе трение вязкое.

Запишем второй закон для груза на пружине с вязким трением (раздел о пружинном маятнике). Решаем динамическим методом (раздел о динамическом и энергетическом методах):

энергия теперь не сохраняется, и энергетический метод частоты не даст.

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad (69)$$

Энергия входит сюда только мерой потерь. Умножим уравнение на $\dot{x}$: производная полной энергии $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ по времени равна

$$\frac{dE}{dt} = -\beta\dot{x}^2 \quad (70)$$

и энергия убывает, пока груз движется. Поделим уравнение на массу и обозначим $2\gamma = \beta/m$, $\omega_0^2 = k/m$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (71)$$

Частоту ω_0 называют собственной: с ней система колебалась бы без трения. Коэффициент γ в обратных секундах называют коэффициентом затухания. Его смысл покажет решение: за время $1/\gamma$ амплитуда колебаний падает в e раз (раздел о трёх режимах затухания).

Гармоническую функцию теперь не угадать. Заметим, что уравнение линейное: сумма двух его решений и решение, умноженное на число, тоже решения. Поищем решение в виде экспоненты с действительным показателем λ :

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (72)$$

После подстановки каждое слагаемое уравнения содержит множитель $Ae^{\lambda t}$:

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) Ae^{\lambda t} = 0 \quad (73)$$

Множитель $Ae^{\lambda t}$ в нуль не обращается, и показатель обязан быть корнем квадратного уравнения

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (74)$$

с дискриминантом

$$D = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) \quad (75)$$

При $D \geq 0$ корни действительные:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (76)$$

Знак дискриминанта делит решения на случаи. При сильном трении, $\gamma > \omega_0$, оба корня действительны и отрицательны. При $\gamma = \omega_0$ корень один. При слабом трении, $\gamma < \omega_0$, действительных корней нет, и экспонента с действительным показателем решением не будет: решение надо искать в другом виде. Все случаи разобраны в следующем разделе.

Три режима затухания

Решим уравнение с трением $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ (раздел о затухающих колебаниях) во всех случаях, которые различает знак $\gamma^2 - \omega_0^2$. Начнём со слабого трения, при котором экспонента с действительным показателем решением не была.

Проверим затухающий косинус. Без трения решением был косинус (раздел о пружинном маятнике). Трение отнимает энергию, и естественно попробовать косинус, амплитуда которого убывает экспонентой:

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega t + \psi_0) \quad (77)$$

Проверим подстановкой. Обозначим фазу $\theta = \omega t + \psi_0$ и продифференцируем дважды:

$$\dot{x} = -Ce^{-\gamma t} (\gamma \cos \theta + \omega \sin \theta), \quad \ddot{x} = Ce^{-\gamma t} ((\gamma^2 - \omega^2) \cos \theta + 2\gamma\omega \sin \theta) \quad (78)$$

Подставим в уравнение. Члены с синусом сокращаются сами, а при косинусе остаётся множитель:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega^2) Ce^{-\gamma t} \cos \theta \quad (79)$$

Косинус с убывающей амплитудой решает уравнение, если

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (80)$$

а это возможно только при $\gamma < \omega_0$. Постоянные C и ψ_0 задают начальные условия, как у пружины. Это колебательный режим. Частота затухающих колебаний ω меньше собственной, так что трение колебания и гасит, и замедляет. Отклонение зажато огибающими $\pm Ce^{-\gamma t}$ (рис. 12), и за время $1/\gamma$ огибающая падает в e раз. Жёсткость в огибающую не входит: при той же массе и том же трении мягкая и жёсткая пружины гаснут одинаково быстро. При $\gamma \rightarrow 0$ возвращаются колебания без трения с частотой ω_0 .

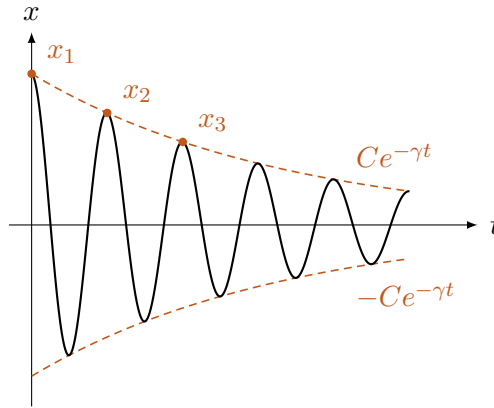


Рис. 12: Затухающие колебания в колебательном режиме: косинус зажат между огибающими $\pm Ce^{-\gamma t}$, и за время $1/\gamma$ огибающая падает в e раз. Точки x_1, x_2, x_3 отмечают амплитуды последовательных колебаний, и по отношению соседних амплитуд находят логарифмический декремент.

Разберём неколебательные режимы. При сильном трении, $\gamma > \omega_0$, оба корня $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ действительны и отрицательны (раздел о затухающих колебаниях). Каждый даёт решение, и их сумма с двумя постоянными тоже решение:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (81)$$

Показатель растущей экспоненты в скобке меньше γ , и обе составляющие гаснут. Сумма двух экспонент обращается в нуль не больше одного раза, и колебаний нет. Этот режим называют аперидическим.

При $\gamma = \omega_0$ корень один, и экспонента $e^{-\gamma t}$ даёт решение с одной постоянной, а начальных условий два. Вторым решением оказывается $te^{-\gamma t}$:

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\gamma t} \quad (82)$$

Проверим подстановкой: $\dot{x} = (A_1 - \gamma A_1 t - \gamma A_2) e^{-\gamma t}$ и $\ddot{x} = (\gamma^2 A_1 t + \gamma^2 A_2 - 2\gamma A_1) e^{-\gamma t}$. В сумме $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \gamma^2 x$ слагаемые с $A_1 t$ и с A_2 дают $\gamma^2 - 2\gamma^2 + \gamma^2 = 0$, а оставшиеся $-2\gamma A_1 + 2\gamma A_1 = 0$. Этот режим называют критическим.

Поймём, почему режим решает знак. Отделим от решения убывающую экспоненту: $x = e^{-\gamma t} y$. Подстановка в уравнение с трением даёт уравнение для y , в котором трения нет:

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \gamma^2) y = 0 \quad (83)$$

Знак коэффициента при y решает всё. При $\gamma < \omega_0$ это уравнение пружины, y качается с частотой $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, и получается затухающий косинус. При $\gamma > \omega_0$ коэффициент отрицательный, как у перевёрнутого маятника (раздел о частоте из кривизны потенциала), и y уходит экспонентой с показателем $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. При $\gamma = \omega_0$ остаётся $\ddot{y} = 0$, и y меняется линейно. Растёт при этом только y : огибающая $e^{-\gamma t}$ гасит рост, потому что $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$, и x возвращается к нулю без колебаний. Режим решает тот же знак коэффициента линейного члена, что в начале главы отделял колебания около равновесия от ухода от него.

На фазовой плоскости (раздел о фазовом портрете) колебательный режим идёт спиралью к началу координат (рис. 13). Эллипс колебаний без трения размыкается, потому что энергия убывает, и каждый следующий виток лежит внутри прежнего. Спираль была и в третьей неделе, но там она раскручивалась наружу, и давал её шаг явной схемы Эйлера у движения без трения. Здесь спираль физическая, её даёт трение. Фазовые траектории критического и апериодического режимов приходят в начало координат, не обходя его.

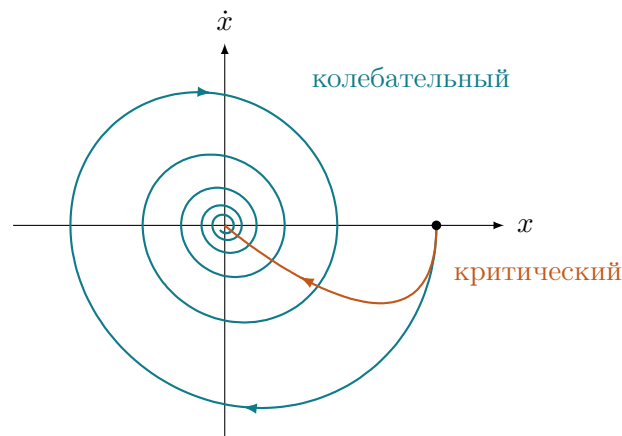


Рис. 13: С трением эллипс свободных колебаний размыкается в спираль: при $\gamma = 0,1 \omega_0$ точка $(x, \dot{x})$ за каждый оборот подходит к началу координат почти вдвое ближе. Эту спираль даёт трение, а не шаг счёта. В критическом режиме точка из того же отклонения приходит в начало, ни разу его не обходя, и груз возвращается в равновесие, не переходя через него.

Найдём, где нужен критический режим. Отпустим систему из покоя. Критический режим возвращает её к равновесию быстрее любого апериодического с той же собственной частотой: его отклонение в каждый момент меньше, и в любую полосу около нуля он входит раньше.

На долгом хвосте он быстрее и колебательного. Медленнее всего гаснет слагаемое с наименьшим показателем, а у критического режима этот показатель наибольший, ω_0 . У колебательного огибающая гаснет с показателем $\gamma < \omega_0$. У апериодического медленная экспонента гаснет с показателем $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, тоже меньшим ω_0 , а при сильном трении близким к $\omega_0^2/2\gamma$: трение тормозит возврат.

Оговорок две. В широкую полосу колебательный режим входит раньше критического. При $\gamma/\omega_0 = 0,7$ отклонение навсегда становится меньше пяти процентов начального через $2,90/\omega_0$, а у критического через $4,74/\omega_0$, хотя потом колебательный режим перелетает равновесие, на 4,6 процента, и дальше качается внутри полосы. И если систему толкнуть к равновесию, неколебательные режимы тоже могут один раз пройти через нуль. Критический, начавший из x_n со скоростью v_n к равновесию, идёт как $x = (x_n + (\omega_0 x_n - v_n)t)e^{-\omega_0 t}$ и перелетает при $v_n > \omega_0 x_n$.

Критический режим нужен там, где система должна встать быстро и без качаний. Стрелка измерительного прибора должна встать на отсчёт, не раскачиваясь. Так же настраивают регулятор, который поворачивает сустав робота к заданному углу: ошибка угла подчиняется уравнению с трением, и коэффициенты регулятора выбирают на критическое затухание. Условие $\gamma = \omega_0$, записанное через коэффициент трения $\beta = 2m\gamma$, даёт

$$\beta_{кр} = 2m\omega_0 = 2\sqrt{mk} \quad (84)$$

У груза 0,1 кг на пружине 10 Н/м это 2 кг/с. Это число обещала четвёртая неделя: шарик в ямке $U = kx^2/2$ быстрее всего успокаивается при трении около $2\sqrt{mk}$ (конспект четвёртой недели, раздел о спуске в минимум с трением). Буквы там другие. Коэффициент трения в четвёртой неделе обозначен γ , а буквой β назван параметр градиентного спуска с импульсом; в этой главе β коэффициент трения, а $\gamma = \beta/2m$ коэффициент затухания в обратных секундах. Как подобрать трение, когда у ямки стенки разной крутизны, разобрано в мосте этой недели (раздел об овраге и методе с импульсом).

1.12 Сосчитаем колебания до затухания

Декремент затухания и добротность

Как охарактеризовать затухание одним числом? Возьмём амплитуды двух соседних колебаний, x_n и x_{n+1} , то есть значения огибающей, разделённые периодом затухающих колебаний $T = 2\pi/\omega$ (рис. 12; раздел о трёх режимах затухания). Их отношение одно и то же для любой пары:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-\gamma T} = e^{-d} \quad (85)$$

Число $d = \gamma T$ называют логарифмическим декрементом затухания. Его меряют по двум соседним амплитудам:

$$d = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad (86)$$

Если амплитуда падает в e раз за N колебаний, то

$$d = \frac{1}{N} \quad (87)$$

Проверить это просто: за N периодов амплитуда умножается на e^{-dN} , и падение ровно в e раз означает $dN = 1$.

Добротность. У системы, которая гаснет медленно, декремент мал, и удобнее число, которое растёт вместе с числом колебаний. Добротностью называют

$$Q = \frac{\pi}{d} = \pi N \quad (88)$$

Осциллятор, у которого амплитуда падает в e раз за $N = 100$ колебаний, имеет $d = 0,01$ и $Q \approx 314$. У груза $0,1$ кг на пружине 10 Н/м такую добротность даёт коэффициент трения $0,0032$ кг/с, и огибающая падает в e раз за 63 с. Подставив $d = \gamma T$ и $T = 2\pi/\omega$, получим $Q = \omega/2\gamma$, а при слабом затухании, когда ω почти равна ω_0 ,

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (89)$$

Энергия как мера потерь. Частоты энергия здесь не даёт, но потери мерить ею удобно. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды и за период умножается на e^{-2d} , так что потеря за период равна $\Delta E = E(1 - e^{-2d})$, где E полная энергия в максимуме отклонения. При слабом затухании, $d \ll 1$, потеря близка к $2dE$, и

$$Q \approx 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (90)$$

Добротность равна отношению запасённой энергии к средней потере за время $T/2\pi$, то есть за один радиан фазы. Средней потому, что потеря за радиан зависит от фазы: в крайней точке скорость, а с ней мощность трения $\beta \dot{x}^2$, равны нулю. Потеря за целый период в 2π раз больше средней потери за радиан, и путать два отношения нельзя: при $d = 0,01$ энергия больше потери за период только в $50,5$ раза, а $Q \approx 314$. Знак $\approx$ стоит потому, что определением мы взяли π/d , а энергетическое отношение с ним совпадает только при слабом затухании. При $d = 0,5$ энергетическое даёт $9,9$, а π/d даёт $6,3$.

Двое часов. Какой осциллятор гаснет быстрее, зависит от часов, по которым считать. У первого период 10 нс и $\gamma = 10^5$ с $^{-1}$: $d = 0,001$, амплитуда падает в e раз за тысячу колебаний, $Q \approx 3140$. У второго период 1 мс и $\gamma = 100$ с $^{-1}$: $d = 0,1$, амплитуда падает в e раз за десять колебаний, $Q \approx 31,4$. По счёту своих колебаний первый живёт в сто раз дольше второго. По секундомеру он гаснет за 10 мкс, а второй за 10 мс, в тысячу раз медленнее. Добротность меряет затухание часами самой системы, её периодами. Сколько колебаний держится модель без трения, сказано в следующем разделе.

Измерим трение числом колебаний

Начало главы отбросило трение и назвало колебания свободными. Как долго этот выбор держится? Ответ даёт число колебаний N , за которые амплитуда падает в e раз (раздел о декременте и добротности):

$$N = \frac{1}{d} = \frac{Q}{\pi} \quad (91)$$

Это мера затухания в единицах самой системы, в её периодах. За n колебаний амплитуда умножается на $e^{-n/N}$, и если n мало против N , она почти не меняется: за десятую часть от N колебаний она падает на $9,5$ процента. На интервале, малом против N периодов, трением можно пренебречь, и колебания на нём можно считать свободными.

У осциллятора с $Q \approx 314$ число $N = 100$. Через десять колебаний его амплитуда меньше начальной на $9,5$ процента, через сто остаётся 37 процентов, через триста около пяти. Энергия гаснет вдвое быстрее амплитуды, в e раз за 50 колебаний.

Маятнику Фуко нужно большое N . Его плоскость качания поворачивается из-за вращения Земли, на широте 56° примерно на $12,5^\circ$ в час, и чтобы поворот был заметен, маятник должен качаться часами без подталкивания. Маятник длиной 10 м делает за три часа около 1700 колебаний, и, чтобы его амплитуда за это время упала не больше чем в e раз, ему нужно N не меньше 1700, то есть добротность больше 5000. В модели вязкого трения длина не помогает, от неё зависят только числа 1700 и 5000. За время t маятник делает t/T колебаний, а $N = 1/d = 1/(\gamma T)$, и условие $t/T \leq N$ есть просто $\gamma t \leq 1$: за три часа γ должна быть не больше $9 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, какой бы ни была нить. Короткий маятник делает больше колебаний, но и N у него при той же γ больше. Настоящий маятник Фуко качается с амплитудой много больше своего груза, и сопротивление воздуха у него растёт как квадрат скорости (раздел о затухающих колебаниях). При той же амплитуде в метрах длинный маятник движется медленнее и за то же время теряет меньше энергии. От массы требование зависит при любом законе сопротивления. Сила сопротивления воздуха у груза того же размера от его массы не зависит, а запас энергии растёт с массой; в модели вязкого трения это видно по коэффициенту затухания $\gamma = \beta/2m$, который с массой падает. Поэтому груз маятника Фуко делают тяжёлым.

Когда колебания кончились? Модель отвечает, что никогда: огибающая $e^{-\gamma t}$ к нулю не приходит, и колебания в модели идут всегда, только всё меньше. Конец колебаний поэтому есть договорённость, а не следствие уравнения. Падение амплитуды в e раз удобно брать масштабом, но колебания на нём не кончаются: остаётся 37 процентов амплитуды. Можно договориться иначе: колебания кончились, когда их амплитуда стала меньше цены деления прибора, которым их измеряют, или сравнялась с дрожанием системы от ударов молекул (конспект тринадцатой недели, раздел о броуновском движении). Какой договорённостью пользоваться, решает задача.

Модель без трения и модель с трением приходится выбирать, как всякую модель. Без трения колебания идут вечно, фазовая траектория замкнута, и ответу хватает одного числа, собственной частоты. С трением модель объясняет больше, затухание и его режимы, но требует второго числа и огибающей в каждом ответе. На интервале, малом против N периодов, обе модели дают один ответ с точностью, которую задаёт отношение интервала к N , и по бритве Оккама берут модель без трения. На интервале, сравнимом с N , трение отбрасывать нельзя, и колебания затухающие. Тем же ходом шестая неделя проверяла модель твёрдого тела: звук пробегает гантель тысячи раз за один её оборот, и деформации ответа не меняют (конспект шестой недели, раздел о неизменных расстояниях). Там сравнивали два времени, а здесь время мерят периодами самой системы.

Настроим трение на овраг

Четвёртая неделя показала, что градиентный спуск, которым обучают модели, есть движение шарика с сильным вязким трением, а градиентный спуск с импульсом есть тот же шарик с трением умеренным (конспект четвёртой недели, раздел о спуске в минимум с трением). Этот метод записывает по шагам длительности Δt уравнение затухающих колебаний $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \frac{dU}{dx} = 0$ (раздел о затухающих колебаниях):

$$x_{j+1} = x_j - \eta \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_j} + (1 - 2\gamma\Delta t)(x_j - x_{j-1}), \quad \eta = \frac{\Delta t^2}{m} \quad (92)$$

Множитель при последнем слагаемом называют параметром импульса. В четвёртой неделе он обозначен β , а в этой главе буква β занята коэффициентом трения. Чем ближе параметр к единице, тем слабее трение. Четвёртая неделя обещала, что в одной ямке шарик быстрее всего

успокаивается при критическом трении. Теперь видно, почему, и видно, как выбрать трение, когда у ямки стенки разной крутизны.

Почему критическое трение лучшее, показали решения уравнения с трением (раздел о трёх режимах затухания): при критическом трении самое медленное слагаемое решения гаснет быстрее, чем при любом другом. Оптимизации важен именно долгий хвост: сходимость меряют до миллионных долей.

Функция потерь настоящей модели похожа не на ямку, а на овраг: вдоль дна она меняется медленно, поперёк круто (рис. 14). Около дна это квадратичная яма с двумя жёсткостями, $k_{\min}$ вдоль дна и $k_{\max}$ поперёк, а масса и трение у шарика одни. В осях оврага движение распадается на два независимых осциллятора с частотами $\omega_{\min} = \sqrt{k_{\min}/m}$ и $\omega_{\max} = \sqrt{k_{\max}/m}$, и критическим для обоих трение быть не может. Сделаем его критическим для пологой стенки, $\gamma = \omega_{\min}$. Крутая стенка при таком трении качается, но гаснет с той же огибающей $e^{-\gamma t}$, потому что жёсткость в огибающую не входит. Обе стенки гаснут с показателем $\omega_{\min}$. Трение сильнее замедлило бы пологую стенку, а слабее заставило бы и её качаться и гаснуть медленнее.

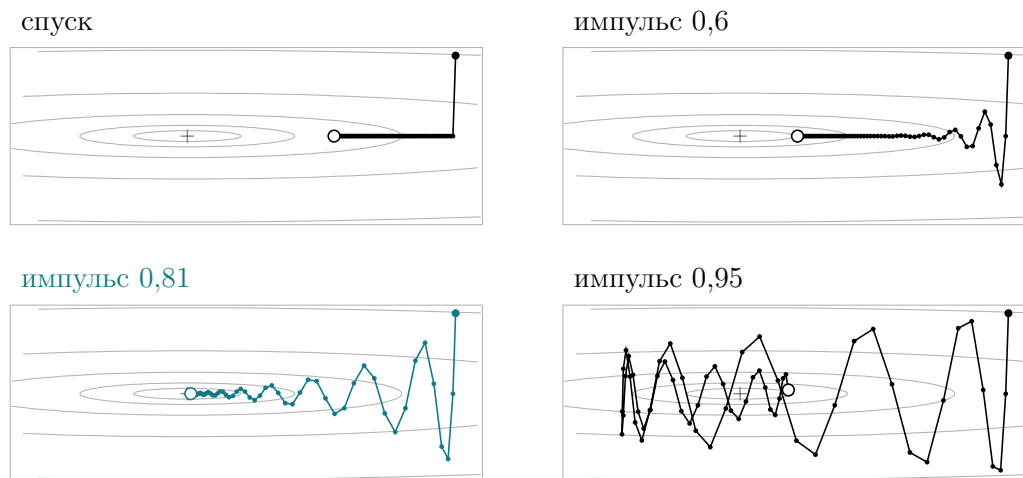


Рис. 14: Овраг с отношением жёсткостей стенок $k_{\max}/k_{\min} = 100$, шаг $\eta = 1/k_{\max}$, по 60 шагов из одной точки на крутой стенке. Спуск без импульса гасит крутую стенку за один шаг и дальше ползёт по дну, с импульсом 0,6 шарик тоже ползёт, при 0,95 проскакивает минимум и качается вдоль дна, а при 0,81, критическом для пологой стенки, к шестидесятому шагу он почти на дне. Крутая стенка при 0,81 качается, но гаснет так же быстро, как пологая.

Откуда тогда выигрыш? В непрерывном времени его не определить: время у метода условное, масштаб его можно выбрать любым, и любой режим станет сколь угодно быстрым. Сравнивают число шагов, а шаг ограничен крутой стенкой. Слишком крупный шаг раскачивает счёт, как раскручивала орбиту схема Эйлера в третьей неделе (конспект третьей недели, раздел о численном интегрировании), поэтому $\omega_{\max}\Delta t$ порядка единицы, и за шаг пологая стенка проходит угол $\omega_{\min}\Delta t$ порядка $\sqrt{k_{\min}/k_{\max}}$. Градиентный спуск гасит её за шаг на долю порядка $k_{\min}/k_{\max}$, а критическое трение на долю порядка $\sqrt{k_{\min}/k_{\max}}$. Выигрыш поэтому в $\sqrt{k_{\max}/k_{\min}}$ раз.

Проверим счёт. Пусть $k_{\max}/k_{\min} = 100$ и шаг $\eta = 1/k_{\max}$, то есть $\omega_{\max}\Delta t = 1$. Спуск без импульса умножает отклонение пологой стенки на 0,99 за шаг. Параметр импульса 0,81, критический для пологой стенки, умножает огибающие обеих стенок на 0,90 за шаг. Из точки, где обе координаты равны единице, точность 10^{-6} спуск набирает за 1375 шагов, тяжёлый шарик за 158, почти в девять раз быстрее; корень из отношения жёсткостей равен десяти. При параметре

0,6 трение для пологой стенки слишком сильное, и шарик ползёт вдоль дна 526 шагов. При 0,95 трение слишком слабое, шарик проскакивает дно вдоль оврага и окончательно набирает точность только за 542 шага. Критический параметр схемы равен $(1 - \gamma\Delta t)^2 = 0,81$; формула $1 - 2\gamma\Delta t$, верная в первом порядке по шагу, даёт рядом 0,80. На пологой стенке $\omega_{\min}\Delta t = 0,1$, и непрерывная картина там держится. На крутой шаг крупный, и картина главы там приближённая.

Градиентный спуск с импульсом появился в 1964 году у Бориса Поляка: метод, который до того применяли к линейным системам уравнений, он перенёс на поиск минимума функций. Он назвал его методом тяжёлого шарика, потому что непрерывный вариант метода есть уравнение движения тела в потенциальном поле, и заметил, что инерция ведёт движение по дну оврага. Лучшая настройка у Поляка другая, чем выше: шаг $3,3/k_{\max}$ и параметр импульса 0,67. При отношении жёсткостей 100 ошибка падает в e раз за 5 шагов против 50 у спуска с лучшим для него шагом. Пологая стенка при такой настройке гасится критически, а крутая колеблется с периодом в два шага, чего у непрерывного осциллятора не бывает. Соответствие градиентного спуска с импульсом затухающему осциллятору явно записал Н. Цянь в 1999 году: при той же вязкости масса ускоряет возврат не больше чем вдвое, и ровно вдвое при критическом затухании. Траектории в овраге нарисованы по образцу статьи Г. Го «Why Momentum Really Works» (2017).

1.13 Соберём, что даёт малое отклонение

Закроем счёт главы

Глава началась с вопроса, что станет на Луне с периодами пружины и маятника (вводный раздел главы). Пружина качается там с прежним периодом, а маятник в 2,46 раза медленнее. Системы главы живут по разным законам, и всё же уравнение у них одно, $\alpha\ddot{x} + \kappa x = 0$: период каждой складывается из двух её чисел, инерции α и жёсткости κ (раздел о динамическом и энергетическом методах).

Сведём шесть систем.

Система	Что возвращает	Инерция α	Жёсткость κ	Период
Груз 0,1 кг на пружине 10 Н/м, висющий	упругость	m	k	0,63 с
Груз на нити 1 м	тяжесть	ml^2	mg	2,01 с
Тот же на Луне, $g = 1,62$ м/с ²	тяжесть	ml^2	mg	4,94 с
Стержень 1 м на оси через конец	тяжесть	$ml^2/3$	$mg/2$	1,64 с
Тележки 1 и 3 кг на пружине 20 Н/м	упругость	$\mu = 0,75$ кг	k	1,22 с
Контур 1 мГн и 1 мкФ	конденсатор	L	$1/C$	0,2 мс

Затухание у всех шести мерят одним числом, числом колебаний системы: при $Q \approx 314$ амплитуда падает в e раз за 100 колебаний (раздел о числе колебаний).

Законы за строками разные. Груз на пружине возвращает упругость (раздел о пружинном маятнике), груз на нити и стержень возвращает тяжесть, а нить груз не возвращает, она тянет его к подвесу (разделы о математическом маятнике и о физическом маятнике). В контуре возвращает конденсатор, это $1/C$ в колонке жёсткости, а инерцию даёт катушка (раздел об электромагнитных колебаниях). Период во всех строках равен $2\pi\sqrt{\alpha/\kappa}$. Где у задачи есть потенциальная энергия, жёсткость равна её кривизне у дна, $\kappa = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}$ (раздел о частоте из кривизны потенциала).

Первые три строки отвечают на вопрос входа. Вес у висящей пружины сдвинул равновесие и жёсткость не тронул, поэтому на Луне период у неё тот же. У маятника тяжесть сама возвращает груз, и его жёсткость mg/l на Луне меньше вместе с g (раздел о постоянной силе). У тележек инерцией стала приведённая масса (раздел о двух тележках на пружине).

Разные законы дают одно уравнение, пока отклонение мало. В шестой неделе было наоборот: один закон давал четырём телам разные ответы (конспект шестой недели, итоговый раздел главы). Одно уравнение для тяготения и пружины дала и пятая неделя, у тела в шахте сквозь однородную планету. Там сила линейна при любой амплитуде, а здесь только около равновесия: в нём сила равна нулю, и первым в её разложении остаётся линейный член.

Посчитаем, что вернул язык. Договорились мы о малом отклонении от устойчивого равновесия и о трении, линейном по скорости. У маятника в воздухе обе договорённости требуют малой амплитуды, но против разных масштабов, и сказано об этом во врезке «Граница строгости» (раздел о частоте из кривизны потенциала). Язык вернул одно уравнение для всего, что колеблется около минимума с кривизной, и частоту из двух чисел системы.

«Нет» язык сказал на большой амплитуде и там, где у минимума нет положительной кривизны: у ямы x^4 она равна нулю, у жёлоба на дне излом (разделы о периоде на большой амплитуде и о колебаниях без линейной силы). Там отказывает приближение, а точное уравнение движения остаётся верным. Точное уравнение маятника к тому же решается, и его период считается при любой амплитуде. Тяжёлое тело с неподвижной точкой в шестой неделе в общем виде не решалось (конспект шестой недели, раздел об уравнениях Эйлера), у маятника точный ответ есть.

Заглянем во второй семестр и в восьмую неделю. Вынужденные колебания, а с ними и добротность, вернутся во втором семестре, у колебаний тока в цепях переменного тока. Восьмая неделя возьмёт первый член силы упругости готовым и спросит, что он значит внутри материала (конспект восьмой недели, раздел о законе Гука).