

Лекция 1. Введение. Теория размерностей.

Клименок Кирилл Леонидович

03.09.2026

1 Введение

Добрый день, дорогие друзья! Сегодня мы начинаем курс общей физики, и на первом занятии я хотел бы обсудить, что такое физика и почему она важна для специалистов в области машинного обучения и искусственного интеллекта.

Физика — это фундаментальная естественно-научная дисциплина, которая, как и химия, биология и астрономия, использует эксперимент для описания объективной реальности. Физика сосредотачивается на самых базовых закономерностях, лежащих в основе всех природных явлений, и часто становится отправной точкой для других наук.

Почему физика важна для вас, будущих специалистов по машинному обучению? Во-первых, физика развивает понимание того, как строить модели реальности на основе экспериментальных данных. Этот процесс очень похож на то, чем вы будете заниматься в машинном обучении — сбор данных, построение моделей, прогнозирование поведения систем.

Кроме того, многие математические концепции и идеи, с которыми вы столкнетесь в своей профессиональной деятельности, изначально появились в физике. Эти концепции впоследствии перешли в другие области знаний, включая математику, где они уже формально вводятся и строго обосновываются. В нашем курсе мы будем объяснять их на пальцах и показывать, как они применяются в реальных физических задачах.

Наш обязательный курс физики разделен на два семестра и полностью покрывает классическую физику. Первый семестр будет посвящен механике и термодинамике — основам понимания движения, сил и энергии. Во втором семестре мы перейдем к изучению электромагнитных явлений, включая оптику, что позволит понять природу света и электромагнитных волн. Соответственно, наши лекции и записи будут состоять из двух частей: первая часть — механика и термодинамика, вторая часть — электромагнитные явления.

Для желающих углубиться в более современные области физики, в летнем семестре будет предлагаться небольшой 7-недельный курс, посвященный квантовой физике. В этом курсе мы рассмотрим, как квантовая физика изменяет наше представление о мире на микроуровне и как это влияет на нашу общую картину мира. Однако этот курс будет одним из альтернативных и не является обязательным.

Я надеюсь, что этот курс поможет вам увидеть физику не просто как набор формул и законов, но как захватывающую область знаний, способную объяснить и предсказать поведение мира вокруг нас. Давайте начнем наше путешествие с основ классической физики и поймем, как эти базовые принципы формируют наше понимание реальности.

2 Измерения и теория размерностей

2.1 Вводные замечания

Зачем нужны измерения?

Измерения играют важную роль в физике и науке в целом, так как они позволяют количественно описывать явления, проводить эксперименты и сравнивать результаты. Без измерений мы не смогли бы точно определить длину, массу, время, температуру или другие физические величины, что сделало бы невозможным объективное понимание природы. Измерения позволяют ученым и инженерам строить точные модели, проверять гипотезы и разрабатывать технологии, основываясь на реальных данных.

Историческая перспектива измерений

Проблема измерений и единиц измерения уходит корнями в глубокую древность. На протяжении истории человечество использовало различные метрики для разных аспектов повседневной жизни. Например, длину могли измерять в локтях, шагах или пядях, а вес — в фунтах или стоунах. Эти системы были не стандартизированы и могли сильно отличаться от региона к региону. Однако с развитием торговли, науки и технологий возникла необходимость в стандартизации измерений, чтобы обеспечить точность и согласованность.

Пример с 360 градусами и введение радианов

Одним из интересных исторических примеров является деление круга на 360 градусов. Почему именно 360? Это число восходит к древнему Вавилону, где считалось, что в году 360 дней. Число 360 удобно для расчетов, поскольку оно делится на множество чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12 и так далее. Это делало использование градусов удобным для древних астрономов и математиков.

Однако использование 360 градусов как единицы измерения углов имеет свои недостатки. Градусы — это условная единица, основанная на исторических соглашениях, и они не всегда удобны при математических операциях. Например, формула для длины дуги, опирающейся на центральный угол в градусах, может быть довольно сложной и требует дополнительных преобразований:

$$s = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r}{180}$$

где s — длина дуги, θ — угол в градусах, r — радиус окружности.

Чтобы упростить расчеты и сделать их более объективными, были введены радианы. Радиан определяется как угол, при котором длина дуги окружности равна её радиусу. Это приводит к простой формуле:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

где θ — угол в радианах, s — длина дуги, r — радиус окружности. Радианы удобны тем, что напрямую связаны с фундаментальными константами, такими как π , и они делают математические выражения проще и элегантнее, особенно в физике и инженерии. Использование радианов устраняет необходимость в дополнительных коэффициентах преобразования, и углы могут выражаться напрямую через отношения длин.

Таким образом, радианы становятся предпочтительной единицей измерения углов, так как они не только удобны для математических операций, но и обеспечивают более объективное описание угловых измерений.

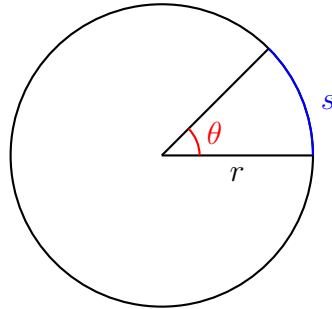


Рис. 1: Вот отсюда берутся радианы

2.2 Стандартная система единиц (СИ/SI) и её эволюция

После того как мы обсудили важность измерений и рассмотрели некоторые исторические примеры, такие как использование градусов и радианов для измерения углов, возникает естественный вопрос: как мы пришли к современным системам измерения, и почему они важны?

Историческая справка: Великая французская революция и метрическая система

История стандартной системы единиц берет свое начало во времена Великой французской революции в конце 18 века. В этот период возникла идея создать единую, универсальную и логичную систему измерений, основанную на природных явлениях. В результате этой работы был введен метр — единица длины, определенная как одна десятиллионная часть расстояния от экватора до Северного полюса вдоль Парижского меридиана. В дальнейшем метрическая система получила широкое распространение, и из неё развилась современная Международная система единиц (СИ).

Метрическая система предложила использовать десятичную систему, что сделало измерения более простыми и удобными для научных и повседневных нужд. Например, один километр стал равен 1000 метров. Однако, несмотря на стремление к унификации, переход на десятичную систему не был полным. Хотя длины и массы были успешно переведены в метрическую систему, время оставалось исключением. Были идеи перейти на десятичные часы, но они не прижились.



Рис. 2: Часы с 10 делениями вместо 12.

Появление эталонов для базовых величин

По мере того как метрическая система развивалась, потребовалось создание точных эталонов для базовых величин, таких как длина и масса. Первоначально эталоны представляли собой физические объекты. Например, метр определялся как длина между двумя рисками на эталоне из платино-иридиевого сплава, а килограмм — как масса эталона, хранящегося в Международном бюро мер и весов.

Для измерения времени также был установлен эталон — цезиевый стандарт. В 1967 году была принята новая дефиниция секунды, основанная на свойствах атома цезия-133. Секунда стала определяться через частоту излучения, соответствующую переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133.

Переход к нематериальной системе через мировые константы

С развитием науки стало очевидно, что использование физических эталонов имеет свои ограничения. Эти эталоны могли изменяться со временем и под воздействием окружающей среды. В 2018 году было принято решение сделать СИ нематериальной, основываясь на неизменных мировых константах. Теперь такие константы, как скорость света (c) и постоянная Планка (h), имеют точные значения, которые определяют базовые единицы.

- Скорость света в вакууме теперь точно равна $299\,792\,458$ м/с, и это значение используется для определения метра.
- Постоянная Планка h имеет точное значение $6.62607015 \times 10^{-34}$ Дж·с. Эта константа является ключевой для определения килограмма, связанного с квантовой механикой.

Кроме того, важно отметить, что секунда, как базовая единица времени, остается единственной величиной, определяемой через экспериментальное наблюдение, поскольку время измеряется через атомные стандарты, такие как цезиевый стандарт. В настоящее время ведутся работы по повышению точности эталонов времени с использованием оптических стандартов.

Роль времени как основной величины и важность точных стандартов

Измерение времени является одной из самых фундаментальных задач в физике и науке в целом. Точные стандарты времени, такие как цезиевый и оптический стандарты, играют ключевую роль в навигации, коммуникациях и фундаментальных исследованиях. С переходом к нематериальной СИ, роль времени как основной величины только усилилась, что подчеркивает важность точных стандартов.

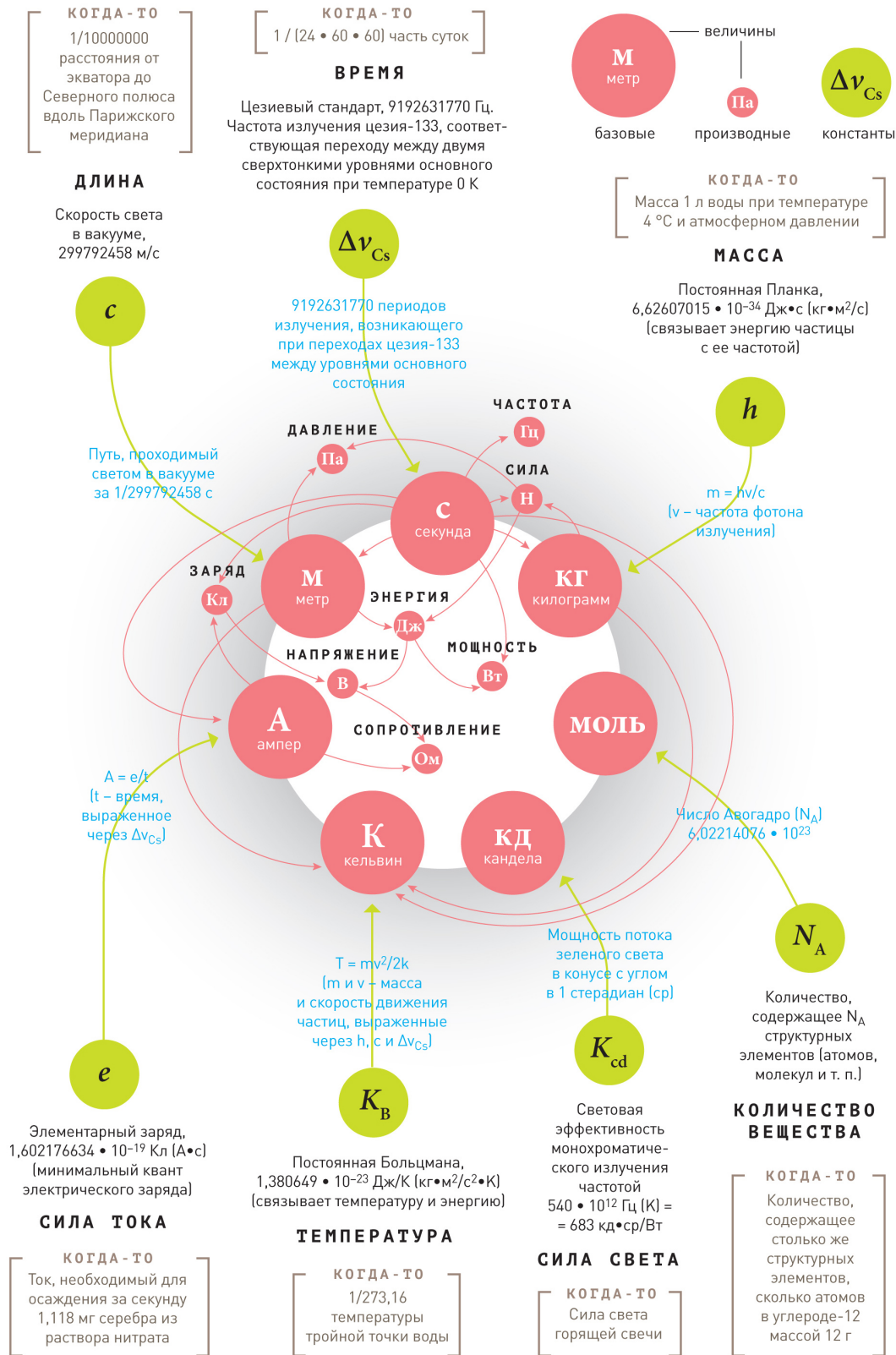


Рис. 3: Инфографика, иллюстрирующая структуру системы СИ.

2.3 Другие системы единиц

После того как мы обсудили важность измерений и рассмотрели некоторые исторические примеры, такие как использование градусов и радианов для измерения углов, возникает естественный вопрос: как мы пришли к современным системам измерения, и почему они важны?

Система СИ является наиболее распространенной и универсальной системой измерения, однако существуют и другие системы единиц, которые находят применение в различных областях науки и техники. Разные системы единиц могут быть полезны для специфических вычислений, облегчая их выполнение и делая результаты более понятными. Использование различных систем единиц также может помочь избежать сложных констант и коэффициентов, упрощая математические выражения.

Различные системы единиц могут подчеркивать важные аспекты физических явлений, помогать в визуализации процессов или обеспечивать удобство при расчетах. Примеры таких систем включают систему СГС, которая широко используется в электромагнетизме, и планковские величины, которые применяются в квантовой механике. Рассмотрим эти примеры более подробно.

Система СГС (сантиметры, граммы, секунды)

Система СГС (CGS) является одной из исторических систем единиц, основанных на сантиметре, грамме и секунде. Она особенно полезна в электромагнитных расчетах, где часто используются длины, массы и времени в меньших масштабах по сравнению с системой СИ.

Возникает вопрос: можно ли что-то исключить из системы СИ, чтобы упростить расчеты? Например, можно ли обойтись без отдельной единицы измерения заряда, такой как кулон? В системе СИ закон Кулона имеет следующую форму:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная с размерностью $[\epsilon_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$, q_1 и q_2 — заряды в кулонах, r — расстояние между ними.

Размерность ϵ_0 показывает, что в системе СИ кулон определяется через электрическую постоянную и другие основные величины, что может усложнять понимание и использование заряда в физических расчетах.

В системе СГС закон Кулона записывается проще:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Здесь заряд имеет размерность $[\text{заряд}] = \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}$. Это упрощает представление о заряде, так как он выражается напрямую через основные единицы массы, длины и времени. В системе СГС 1 кулон равен примерно 3×10^9 электростатических единиц заряда (э.с.з.).

Преимущество системы СГС состоит в том, что в уравнениях Максвелла различные физические константы, такие как скорость света, появляются естественным образом, придавая им физический смысл. Это упрощает понимание уравнений, описывающих электрические и магнитные поля, и позволяет избегать множества коэффициентов в формулах.

Планковские величины: вершина объективности

Планковские величины представляют собой набор единиц, основанных на фундаментальных физических константах: скорости света (c), постоянной Планка (h), и гравитационной постоянной

ной (G). Эти величины определяют базовые масштабы для длины, времени, массы и других физических величин в квантовой механике.

Вот основные планковские величины и их определения:

- **Планковская длина** (l_p):

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35} \text{ м}$$

- **Планковское время** (t_p):

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44} \text{ с}$$

- **Планковская масса** (m_p):

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.176 \times 10^{-8} \text{ кг}$$

- **Планковская энергия** (E_p):

$$E_p = m_p c^2 \approx 1.956 \times 10^9 \text{ Дж}$$

- **Планковская температура** (T_p):

$$T_p = \frac{E_p}{k_B} \approx 1.416 \times 10^{32} \text{ К}$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — приведенная постоянная Планка, k_B — постоянная Больцмана.

Планковские величины подчеркивают глубокую связь между квантовой механикой и общей теорией относительности, позволяя физикам проводить исследования на самых фундаментальных уровнях природы. Они представляют собой предельные масштабы, ниже которых классические представления о пространстве и времени теряют смысл, и являются важным инструментом для изучения явлений в черных дырах или при ранних стадиях Вселенной.

2.4 Теория размерностей

Кажется, что можно остановиться на том, что мы ввели основные единицы измерения и перейти к изучению конкретных физических величин. Однако, даже тот факт, что мы ввели единицы измерения, уже может нам помочь глубже понять физические процессы. Например, из введения основных единиц следует, что любая физическая величина может быть представлена как произведение базовых величин в определенных степенях.

Формула размерностей как степенной многочлен

Утверждение: Формула размерностей любой физической величины может быть представлена как степенной многочлен от базовых размерностей. В общем виде это утверждение можно записать как:

$$[Q] = L^a \cdot M^b \cdot T^c$$

где $[Q]$ — размерность физической величины Q , а a, b, c — показатели степеней, соответствующие длине (L), массе (M) и времени (T).

Доказательство утверждения: Будем доказывать это утверждение через преобразование масштабов величин. Рассмотрим функцию объема V и изменим ее на примере двух объектов с линейными размерами $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$. Предположим, что объем V является функцией от размеров объекта: $V = f(A)$ и $V' = f(B)$.

1. *Однократное преобразование масштабов* Выполним преобразование линейных размеров, увеличив их в k раз. Тогда объемы будут определяться как:

$$V = f(A) \quad \text{и} \quad V' = f(B)$$

после масштабирования:

$$V = f(kA) \quad \text{и} \quad V' = f(kB)$$

Получаем отношение:

$$\frac{V}{V'} = \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f(kA)}{f(kB)}$$

Это равенство можно выразить в виде функции $\phi(k)$, которая не зависит от конкретных значений A и B :

$$\frac{f(A)}{f(kA)} = \frac{f(B)}{f(kB)} = \phi(k)$$

2. *Свойства функции $\phi(k)$* Учитывая, что при $k = 1$ объем не изменяется, получаем:

$$\phi(1) = 1$$

Кроме того, предположим, что у этой функции существует производная:

$$\left. \frac{d\phi(k)}{dk} \right|_{k=1} = N$$

Мы используем это предположение для физических выкладок, так как в физике такие зависимости гладкие и имеют производные.

3. *Двойное преобразование масштабов* Теперь рассмотрим двойное изменение масштаба:

$$\phi(k_1 k_2) = \frac{f(A)}{f(k_1 k_2 A)} = \frac{f(A)}{f(k_1 A)} \cdot \frac{f(k_1 A)}{f(k_1 k_2 A)} = \phi(k_1) \cdot \phi(k_2)$$

Это уравнение говорит о том, что функция ϕ должна удовлетворять функциональному уравнению, где $\phi(k_1 k_2) = \phi(k_1) \cdot \phi(k_2)$.

4. *Угадывание функции ϕ* Из этого уравнения мы можем угадать, что единственная функция, подходящая под данное условие, — это степенной многочлен вида:

$$\phi(k) = k^N$$

Комментарий о строгом доказательстве: Честное математическое доказательство того, что только эта функция подходит, можно провести через составление и решение дифференциального уравнения. Для этого дифференцируем равенство $\phi(k_1 k_2) = \phi(k_1) \cdot \phi(k_2)$ по k_1 , подставляем $k_1 = 1$ и решаем уравнение, разделяя переменные.

Следствия из утверждения

1. **Умножение размерных величин:** Если A и B — две физические величины с размерностями $[A] = L^a \cdot M^b \cdot T^c$ и $[B] = L^d \cdot M^e \cdot T^f$, то их произведение $A \cdot B$ имеет размерность $[A \cdot B] = L^{a+d} \cdot M^{b+e} \cdot T^{c+f}$.

2. **Возведение в степень:** Если физическая величина A имеет размерность $[A] = L^a \cdot M^b \cdot T^c$, то величина A^n имеет размерность $[A^n] = L^{an} \cdot M^{bn} \cdot T^{cn}$.

Вопрос для размышления

А что будет, если взять логарифм от размерной величины? Как это повлияет на размерности, и что это может означать с физической точки зрения?

2.5 Размерно-зависимые и размерно-независимые величины

Из понимания того, что любая физическая величина может быть представлена как произведение базовых величин в определенных степенях, следует важное разграничение между размерно-зависимыми и размерно-независимыми величинами.

Определение: Говорят, что величина a размерно-зависима от величин $b_1, b_2, \dots, b_n$, если размерность величины a выражается через размерности этих величин по формуле:

$$[a] = [b_1]^{p_1} [b_2]^{p_2} \dots [b_n]^{p_n}$$

т.е. существуют такие действительные числа $p_1, p_2, \dots, p_n$, что равенство выполняется. Если же таких чисел не существует, то величина a размерно-независима от величин $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Примеры размерно-независимых величин:

- Время t , длина l , масса m — это примеры размерно-независимых величин, так как они являются основными единицами измерения.
- Система величин: скорость, динамическая вязкость¹, и время также является системой размерно-независимых величин. Это видно из того, что в размерность вязкости входит масса, поэтому она не может выражаться через скорость и время. Аналогично, время и скорость не могут выражаться через размерности друг друга, поскольку скорость включает длину, а время — нет. Такие системы величин представляют собой множество размерно-независимых величин.

¹Формально мы еще не знакомы с понятием динамической вязкости, но для нас представляет интерес размерность вязкости. Динамическая вязкость имеет размерность $ML^{-1}T^{-1}$.

Пример размерно-зависимых величин:

- Давление P является величиной, размерно-зависимой от динамической вязкости η , ускорения свободного падения g , и длины l . Действительно, размерность давления может быть выражена через размерности вязкости, ускорения и длины. Рассмотрим их размерности:

$$[P] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}, \quad [\eta] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}, \quad [g] = \text{LT}^{-2}, \quad [l] = \text{L}$$

Будем искать такие числа p, q, r , чтобы выполнялось равенство:

$$[P] = [\eta]^p [g]^q [l]^r$$

Подставив размерности выбранных величин, получим:

$$\begin{aligned} \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2} &= (\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1})^p (\text{LT}^{-2})^q (\text{L})^r \\ &= \text{M}^p \text{L}^{-p}\text{T}^{-p} \cdot \text{L}^q \text{T}^{-2q} \cdot \text{L}^r \end{aligned}$$

Приравняв показатели степеней одинаковых размерностей в правой и левой частях, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} p = 1 \\ -2q - p = -2 \\ -p + q + r = -1 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $p = 1$, $q = 1/2$, $r = -1/2$. Таким образом, получаем:

$$[P] = [\eta]^1 [g]^{1/2} [l]^{-1/2}$$

что доказывает, что давление размерно-зависимо от вязкости, ускорения и длины.

2.6 Пи-теорема

Из предыдущего анализа мы узнали, что любую физическую величину можно выразить как произведение базовых величин в определенных степенях. Этот факт широко используется в физике и был известен нам еще со школьной скамьи. Однако теория размерностей предлагает гораздо более мощный инструмент для анализа физических систем — пи-теорему, которая позволяет свести множество зависимых переменных в задаче к меньшему числу независимых, что существенно упрощает анализ. Пи-теорема уменьшает количество переменных, которые необходимо учитывать при изучении физических процессов, и объединяет параметры в безразмерные комбинации, которые могут быть универсально применимы к различным системам.

Пи-теорема находит применение не только в классической физике, но и в современном анализе данных, включая машинное обучение. В задачах машинного обучения уменьшение числа признаков (фичей) с сохранением информации о системе является ключевым шагом в создании эффективных моделей. Пи-теорема предлагает естественный способ достижения этого путем объединения размерных переменных в безразмерные комбинации.

Формулировка пи-теоремы

Пусть есть физическая величина $a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$, и вид этой функции не меняется при изменении масштабов в выбранном классе систем единиц. Выберем среди аргументов функции наибольшую совокупность величин с независимыми размерностями (от 1 до k), тогда исходная зависимость эквивалентна зависимости между $p = n - k$ безразмерными величинами:

$$\frac{a}{a_1^{\alpha} \dots a_k^{\omega}} = F\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{z_1} \dots a_k^{z_k}}\right) \iff \pi = F(\pi_1, \dots, \pi_p)$$

где π и π_i — безразмерные комбинации переменных.

Доказательство пи-теоремы

Шаг 1: Обезразмеривание переменных Выберем первые k величин и обезразмерим все остальные:

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \Rightarrow \pi = f(a_1, \dots, a_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n)$$

где $\pi_i = \frac{a_i}{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k}}$.

Шаг 2: Изменение масштаба первой переменной Изменим масштаб величины a_1 , но вид зависимости не изменится:

$$\pi = f(a_1, \dots, a_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n) \Rightarrow \pi = f(10a_1, \dots, a_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n)$$

Поскольку вид функции остается неизменным, можно сделать вывод, что функция не зависит от a_1 , и ее можно исключить:

$$\pi = f(a_2, \dots, a_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n)$$

Шаг 3: Повторение для остальных переменных Повторим аналогичное изменение масштаба для переменных $a_2, \dots, a_k$. В результате остаются только безразмерные величины:

$$\pi = f(\pi_{k+1}, \dots, \pi_n)$$

Это и есть пи-комплексы, которые выражают зависимость исходной величины через уменьшенное число независимых безразмерных параметров.

В контексте машинного обучения пи-теорема может служить основой для уменьшения размерности данных, что особенно полезно при построении моделей. Сведение набора исходных переменных к меньшему числу безразмерных параметров помогает избежать проблемы избыточного количества признаков, улучшает обобщающую способность модели и делает процесс обучения более эффективным.

2.7 Примеры применения пи-теоремы

Пример 1: Падение шарика под действием силы тяжести

Рассмотрим пример с падением шарика под действием силы тяжести. Пусть величина, которую мы хотим описать, — это пройденный путь S за время t . Очевидно, что S зависит от времени t и ускорения свободного падения g . Запишем эту зависимость:

$$S = f(t, g)$$

С точки зрения размерностей:

$$[S] = L, \quad [t] = T, \quad [g] = LT^{-2}$$

При неправильном применении пи-теоремы можно предположить, что зависимость можно выразить как:

$$S = kt^2$$

где k — константа. Однако, такой подход игнорирует влияние ускорения g и не соответствует действительности, так как не учитывает физическую величину g , которая определяет ускорение движения. Это приводит к неполному и неверному описанию зависимости.

Дополнительный комментарий: Если мы изменим масштаб времени, коэффициент k также изменится, что нарушает принцип пи-теоремы, согласно которому вид зависимости не должен изменяться при изменении масштаба величин в выбранном классе единиц.

Теперь рассмотрим правильное применение пи-теоремы на том же примере падения шарика под действием силы тяжести. Величина S зависит от времени t и ускорения свободного падения g :

$$S = f(t, g)$$

С учетом размерностей:

$$[S] = L, \quad [t] = T, \quad [g] = LT^{-2}$$

Преобразуем зависимость с использованием пи-теоремы. Обезразмерим переменные, выбрав g и t в качестве базисных величин:

$$\pi = \frac{S}{gt^2}$$

В этой комбинации π — безразмерная величина. Тогда зависимость S можно выразить через безразмерную комбинацию:

$$\pi = k \Rightarrow \frac{S}{gt^2} = k$$

откуда следует:

$$S = kgt^2$$

где k — некоторая безразмерная константа. Этот результат соответствует известному физическому закону, где $k = \frac{1}{2}$ для свободного падения без начальной скорости.

Пример 2: Сила вязкого трения и число Рейнольдса

Рассмотрим пример с движением шарика в вязкой жидкости. Пусть сила вязкого трения F зависит от вязкости жидкости η , скорости шарика v , радиуса шарика r , и плотности жидкости ρ . Запишем эту зависимость:

$$F = f(\eta, v, r, \rho)$$

С точки зрения размерностей:

$$[F] = \text{MLT}^{-2}, \quad [\eta] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}, \quad [v] = \text{LT}^{-1}, \quad [r] = \text{L}, \quad [\rho] = \text{ML}^{-3}$$

Преобразуем зависимость с использованием пи-теоремы. Выберем вязкость η , скорость v и радиус r в качестве базисных величин. Обезразмерим переменные:

$$\pi_1 = \frac{F}{\eta v r}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v r}{\eta}$$

Первый пи-комплекс π_1 описывает безразмерное выражение силы вязкого трения. Второй пи-комплекс π_2 — это известное число Рейнольдса, которое характеризует соотношение инерционных и вязких сил в жидкости. Число Рейнольдса является ключевым параметром в гидродинамике и будет рассматриваться подробнее в соответствующей лекции.

Правильное применение пи-теоремы позволяет выразить силу вязкого трения через безразмерные комбинации:

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

Или, что эквивалентно:

$$\frac{F}{\eta v r} = f\left(\frac{\rho v r}{\eta}\right)$$

Это означает, что сила вязкого трения зависит от числа Рейнольдса, что подтверждает экспериментальные данные и широко используется в гидродинамике и инженерных приложениях.

Применение пи-теоремы требует тщательного выбора базисных величин и учета всех значимых физических параметров. Ошибки, такие как игнорирование влияющих величин, могут привести к неправильным результатам. Правильное использование пи-теоремы позволяет уменьшить размерность задачи, сохраняя её физическую точность. Именно из-за пи-теоремы мы можем строить уменьшенные модели летательных аппаратов и автомобилей для тестирования их поведения в аэродинамических трубах. Тестируя уменьшенные модели в контролируемых условиях, мы можем предсказывать поведение полноразмерных объектов, что существенно экономит ресурсы и время.